Witt vectors

سید علی اکبر حسینی

۸ آبان ۱۳۹۹

تعریف

زیرمجموعه ی $S \subseteq \mathbb{N}$ را یک زیرمجموعه ی truncation می نامیم هرگاه برای هر $n \in S$، $d \mid n$ داشته باشیم $d \in S$.

تعریف

به عنوان مجموعه $\mathbb{W}_S(A) = A^S$ و نگاشت

$$\omega : \mathbb{W}_S(A) \longrightarrow A^S$$

$$\omega_n((a_i)_i) = \sum_{d|n} d a_d^{\frac{n}{d}}$$

که نگاشت ghost نامیده می شود.

لم

(Dwork) فرض کنید A حلقه جابجایی یکدار باشد که برای هر عدد اول $p \in S$ خودریختی $\Phi_p : A \longrightarrow A$ چنان موجود است که همواره $\Phi_p(x) \equiv x^p$ به پیمانه pA.
در این صورت $(x_n)_n$ در برد نگاشت *ghost* قرار دارد اگر و تنها اگر برای هر $p \mid n \in S$ داشته باشیم $x_n = \Phi_p(x_{\frac{n}{p}})$ به پیمانه $p^{v_p(n)}$

قضیه

ساختار یکتای حلقه ای روی $\mathbb{W}_S(A)$ وجود دارد که به ازای آن نگاشت *ghost* نگاشت بین فانکتورها می شود.

تعریف

اگر $S \supseteq T$ دو زیرمجموعه truncation باشند نگاشت فراموش کردن تعریف می شود

$$R^S_T : \mathbb{W}_S(A) \longrightarrow \mathbb{W}_T(A).$$

نگاشت Verschiebung به صورت

$$V_n : \mathbb{W}_{\frac{S}{n}} \longrightarrow \mathbb{W}_S$$

نگاشت Frobenius به صورت

$$F_n : \mathbb{W}_S(A) \longrightarrow \mathbb{W}_{\frac{S}{n}}(A)$$

و نگاشت Tiechmüller به صورت

$$[-]_S : A \longrightarrow \mathbb{W}_S(A)$$

قضیه

R همریختی حلقه ها، V جمعی، F همریختی حلقه ها و $[-]$ نگاشت ضربی است.

لم

1. $a = \sum_{n \in S} V_n([a_n]_{\frac{S}{n}})$
2. $F_n V_n(a) = na$
3. $aV_n(a') = V_n(F_n(a)a')$
4. $F_m V_n = V_n F_m, \text{if}(m,n) = ۱$

قضیه

$$\mathbb{W}_S(\mathbb{Z}) = \prod_{n \in S} \mathbb{Z}.V_n([۱]_{\frac{S}{n}})$$

با ضرب

$$V_n([۱]_{\frac{S}{n}}) * V_m([۱]_{\frac{S}{m}}) = dV_k([۱]_{\frac{S}{k}})$$

جایی که d ب.م.م و k ک.م.م. است.

قضیه

$$[m]_S = \sum_{n \in S} \frac{۱}{n} (\sum_{d|n} \mu(d) m^{\frac{n}{d}}) V_n([۱]_{\frac{S}{n}})$$

لم

فرض کند A یک $\mathbb{F}_p$ جبر باشد و $\phi : A \longrightarrow A$ نگاشت فروبنیوس باشد. در این صورت

$$F_p = R^{S}_{\frac{S}{p}} \circ \mathbb{W}_S(\phi) : \mathbb{W}_S(A) \longrightarrow \mathbb{W}_{\frac{S}{p}}(A)$$

قضیه

فرض کنید A یک $\mathbb{Z}_{(p)}$ جبر باشد و $I(S) = \{k \in S : p \nmid k\}$. تجزیه طبیعی

$$\mathbb{W}_S(A) = \prod_{k \in I(S)} \mathbb{W}_S(A) e_K$$

داریم که

$$e_k = \prod_{l \in I(S), l \neq ١} \left(\frac{١}{k}(V_k)([١]_{\frac{S}{k}}) - \frac{١}{lk}(V_{lk})([١]_{\frac{S}{lk}})\right)$$

به علاوه ترکیب

$$\mathbb{W}_S(A)e_k \hookrightarrow \mathbb{W}_S(A) \longrightarrow \mathbb{W}_{\frac{S}{k}}(A) \longrightarrow \mathbb{W}_{\frac{S}{k} \cup P}(A)$$

ایزومرفیسم حلقه ها است.

لم

اگر A یک $\mathbb{F}_p$ جبر باشد آنگاه $VF = p$.

قضیه

اگر A یک حلقه ی p پیچش آزاد باشد و $\phi : A \longrightarrow A$ همریختی باشد که $a^p \equiv \phi(a)$ به پیمانه p آنگاه

$$t_\phi : \frac{A}{p^n A} \longrightarrow \mathbb{W}_n\left(\frac{A}{pA}\right)$$

ایزومرفیسم است.

قضیه

(*Teichmüller*) فرض کنید A حلقه ای باشد و $m \lhd A$ ایده آلی از آن باشد و A با توپولوژی به وجود آمده از m کامل باشد و حلقه ی $k = \frac{A}{m}$ کامل و از مشخصه $p > ۰$ باشد. آنگاه نگاشت $t : k \longrightarrow A$ وجود دارد که ترکیب آن با نگاشت تصویر، همانی روی k است و در روابط

$$t(۰) = ۰, t(۱) = ۱, t(xy) = t(x).t(y)$$

صدق می کند.

$$S_n = (X_n + Y_n) + \frac{۱}{p}(X_{n-۱}^p + Y_{n-۱}^p - S_{n-۱}^p) + \ldots + \frac{۱}{p^n}(X_۰^{p^n} + Y_۰^{p^n} - S_۰^{p^n})$$

$$P_n = \frac{۱}{p^n}[(X_۰^{p^n} + \ldots p^n.X_n)(Y_۰^{p^n} + \ldots + p^n.Y_n) - (P_۰^{p^n} + \ldots + P_{n-۱}^p)]$$

قضیه

فرض کنید k حلقه ای کامل از مشخصه $p > 0$ باشد. A حلقه و $a \triangleleft A$ ایده آلی از آن باشد که با توپولوژی به وجودآمده روی A کامل *complete* و *separated* بشود. در این صورت همریختی یکتای

$$\phi : \mathbb{W}(k) \to A$$

وجود دارد که روی k ثابت است.

قضیه

فرض کنید k میدان از مشخصه $p > ۰$ باشد.فرض کنید
$a = (a_۱, a_۱, ..., a_n) \in \mathbb{W}_n(k)$ و $\alpha \in \mathbb{W}_n(C)$ جوابی از معادله ی
$\mathbb{P}(\alpha) = \mathbb{W}_n(\phi)(\alpha) - \alpha = a$ باشد. اگر $L = k(\alpha)$ توسیع $L \mid k$ دوری با *exponent* برابر با p^n است.
همه ی توسیع های دوری $L \mid k$ با این *exponent* از این روش به دست می آید.
$L \mid k$ دوری است اگر و تنها اگر $a_۰ \notin \mathbb{P}(k)$.

قضیه

نگاشت

$$W \longmapsto k(\mathbb{P}^{-۱}(W))$$

یک به یک است بین همه زیرگروه های $\mathbb{W}_n(k)$ شامل $\mathbb{P}(\mathbb{W}_n(k))$ و همه ی توسیع های k که آبلی هستند با اکسپوننت p^n. به علاوه گروه های $G = Gal(\frac{k(\mathbb{P}^{-۱}W)}{k})$ و $\frac{W}{\mathbb{P}(\mathbb{W}_n(k))}$ به طور طبیعی دوگان هم اند.