دانشکده‌ی علوم ریاضی

حلقه ریاضی عمومی ۱ — انجمن علمی و فوق برنامه‌ی همبند

# نمونه سؤال دوم

مبحث: مشتق

**پرسش ۱** حاصل $y''$ را بر حسب $x$ و $y$ به دست آورید.

آ) $x^3 - y^2 + y^3 = x$ ب) $x^3 - 3xy + y^3 = 1$

**پرسش ۲** اگر $z = \tan(\frac{x}{2})$ باشد، نشان دهید:

آ) $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} = \frac{2}{1+z^2}$ ب) $\sin(x) = \frac{2z}{1+z^2}$ پ) $\cos(x) = \frac{1-z^2}{1+z^2}$

**پرسش ۳** فرض کنید $C$ نمودار $y = x^4 - 2x^2$ باشد.

آ) همه‌ی خط‌های افقیِ مماس بر $C$ را بیابید.

ب) یکی از خط‌های قسمت آ در دو نقطه‌ی متفاوت بر $C$ مماس است. نشان دهید که خط دیگری با این ویژگی وجود ندارد.

پ) معادله‌ی خط راستی را بیابید که در دو نقطه‌ی متفاوت بر نمودار $y = x^4 - 2x^2 + x$ مماس باشد. آیا خط دیگری از این نوع وجود دارد؟ چرا؟

**پرسش ۴** ثابت کنید:

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \arctan(\frac{4}{3}) < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$$

**پرسش ۵** با فرض $x \geq 0$، ثابت کنید:

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$$

**پرسش ۶** فرض کنید $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد و برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ که $x \neq y$ داشته باشیم:

$$f'(\frac{x+y}{2}) = \frac{f(x) - f(y)}{x-y}$$

آ) ثابت کنید برای هر $x, a \in \mathbb{R}$ رابطه $2xf'(a) = f(a+x) - f(a-x)$ برقرار است.
ب) ثابت کنید $f'$ مشتق‌پذیر است.
پ) نشان دهید $f''$ ثابت است و از آن نتیجه بگیرید که $f$، یک چندجمله‌ای از درجه‌ی حداکثر ۱ است.

**پرسش ۷** تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است.

آ) ثابت کنید اگر حداقل یکی از $f$ یا $f'$ برابر با تابع ثابت صفر باشد، آنگاه $f$ روی $\mathbb{R}$ ثابت است.
ب) ثابت کنید اگر حداکثر دو تا از $f$، $f'$، یا $f''$ صفر باشد، آنگاه $f$ روی $\mathbb{R}$ ثابت است.

**پرسش ۸** تابعی مانند $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بیابید که مشتق‌پذیر باشد، اما مشتق آن پیوسته نباشد.

**پرسش ۹** فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر باشد و برای هر $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $0 < f(x) < 1$. ثابت کنید $c$ وجود دارد به طوری که $f''(c) = 0$.

**پرسش ۱۰** تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

آ) نشان دهید $f$ در مبدأ مشتق‌پذیر است و $f'(0) = 1$.
ب) نشان دهید تابع مشتق، یعنی $f'$، در مبدأ پیوسته نیست.
پ) نشان دهید $f$ در هیچ همسایگی حول مبدأ صعودی نیست، و در نتیجه در هیچ همسایگی حول مبدأ $f'$ نمی‌تواند مثبت باشد.
ت) اگر $n$ عددی طبیعی باشد و داشته باشیم:

$$f(x) = \begin{cases} x^{2n} \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ثابت کنید تابع $f$ در نقطه $x = 0$، $n$ بار مشتق‌پذیر است و $f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 0$ برقرار است. همچنین ثابت کنید در این نقطه، تابع مشتق $(n+1)$ام ندارد (راهنمایی: از استقرا استفاده کنید.). آیا $x = 0$ نقطه ماکسیمم موضعی $f$ است؟ مینیمم موضعی چطور؟ نقطه عطف چطور؟ نمودار $f$ را رسم کنید.

**پرسش ۱۱** اگر تابع $(0 < a < b)$ $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ روی $[a, b]$ پیوسته و روی $(a, b)$ مشتق‌پذیر باشد، ثابت کنید $c \in (a, b)$ وجود دارد به طوری که:

$$f'(c) = \frac{1}{c\sqrt{ab}} \cdot \frac{\ln(\frac{ab}{c^2})}{\ln(\frac{c}{a})\ln(\frac{c}{b})}$$