



مدرس: دکتر شهرام خزایی

آنالیز الگوریتم‌ها

تمرین سری پنجم

مهلت ارسال: ۲۳ خرداد- ساعت ۱:۰۰ صبح

گردآورنده: محمدصالح بهرامی

پرسش ۱

مشخص کنید آیا مسئله زیر NP – complete است یا خیر. به عنوان ورودی چند رشته داریم که هر کدام دنباله‌ای از حروف کوچک و بزرگ انگلیسی است. مشخص کنید آیا ممکن است که از هر رشته یک کاراکتر انتخاب کنیم بدون آنکه از یک حرف خاص هر دو نوع کوچک و بزرگ آن برداشته شده باشد؟
به عنوان مثال اگر رشته‌های ما aB ، ac ، BC ، Abc باشد، آنگاه می‌توانیم از رشته‌ی اول A ، از رشته‌ی دوم B ، از رشته‌ی سوم c و از رشته‌ی چهارم B را انتخاب کنیم.
به عنوان مثالی دیگر ممکن نیست که از مجموعه‌ی Ab ، aB ، ab ، AB بتوانیم کاراکترهای مناسبی را به هیچ طریقی انتخاب کنیم.

پرسش ۲

در مسئله بیشینه ارضاپذیری (maximum – satisfiability) ما به دنبال مقداردهی خاصی به متغیرها هستیم که تا حد امکان تعداد عبارت‌هایی که صحیح مقداردهی می‌شوند بیشینه شود. یک الگوریتم ابتکاری ارائه دهید به طوری که همیشه حداقل به نصف جواب بهینه برای مسئله‌ی بیشینه ارضاپذیری دست پیدا کند.

پرسش ۳

یک تهیه کننده فیلم برای فیلم جدید خود تعدادی بازیگر و سرمایه‌گذار نیاز دارد. n بازیگر در دسترس هستند که بازیگر i ، s_i تومان دستمزد می‌گیرد. برای تأمین مالی، m سرمایه‌گذار در دسترس هستند. سرمایه‌گذار j ، p_j تومان به عنوان سرمایه خواهد داد؛ البته فقط در صورتی که بازیگران خاصی با مجموعه L_j ، $L_j \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ در فیلم حضور داشته باشند (تمام بازیگران L_j باید انتخاب شوند). سود تهیه کننده، مجموع پرداخت سرمایه‌گذاران منهای مجموع دستمزد بازیگران است. می‌خواهیم این سود را حداکثر کنیم.

آ) این مسئله را به شکل برنامه‌ریزی خطی صحیح (ILP) در بیاورید که متغیرها مقادیر $\{0, 1\}$ را بگیرند.
ب) (امتیازی) نتیجه را به یک برنامه‌ریزی خطی (LP) ریلکس کنید و نشان دهید که در واقع باید یک راه حل صحیح بهینه وجود داشته باشد (همانطور که در مواردی مانند جریان بیشینه و تطبیق دو بخشی رخ می‌دهد).

پرسش ۴

فرض کنید H یک عدد طبیعی باشد. می‌گوییم یک گراف داده شده H -رنگ‌پذیر است اگر بتوان رأس‌های آن را با H رنگ متمایز طوری رنگ کرد که هر دو رأس مجاور غیر هم‌رنگ باشند.

(آ) یک تعریف رسمی از H -رنگ‌پذیری ارائه کنید.
(ب) نشان دهید که مسئله‌ی زیر به (ILP) بهینه‌سازی قابل کاهش است. آیا گراف داده شد H -رنگ‌پذیر است؟ اگر بله، کمترین مقداری که گراف H -رنگ‌پذیر است را بیابید.
راهنمایی: برای هر رأس v و هر رنگ i یک متغیر بولی $x_{i,v}$ را برابر یک در نظر بگیرید اگر و فقط اگر رأس v رنگ i را بگیرد. همچنین برای هر رنگ i متغیر بولی u_i را برابر یک در نظر بگیرید اگر رنگ i در رنگ‌آمیزی استفاده شده باشد.

پرسش ۵

تحلیل کنید آیا مسئله زیر NP - complete است؟
به ازای ورودی گراف وزن دار G ، آیا یک دور همیلتونی در G وجود دارد که مجموع وزن یال‌های آن حداقل نصف مجموع کل یال‌های G باشد.

پرسش ۶

فرض کنید در مسئله CLIQUE ورودی به گراف‌هایی محدود شوند که درجه هر رأس حداکثر ۳ است. در این حالت مسئله را Deg3 - CLIQUE بنامید.

(آ) ثابت کنید Deg3 - CLIQUE در NP است.
(ب) در استدلال زیر که نتیجه می‌دهد Deg3 - CLIQUE یک مسئله NP - complete است چه مشکلی وجود دارد؟
ما میدانیم که CLIQUE برای گراف دلخواه ورودی یک مسئله NP - complete است. بنابراین کافی است که از کاهش زیر بهره بگیریم. برای گراف G که همه رأس‌های آن از درجه حداکثر ۳ است و پارامتر g در مسئله Deg3 - CLIQUE همین گراف G و پارامتر g بدون تغییر یک عضو در مسئله CLIQUE نیز هست. و به همین خاطر بدون تغییر جواب هر دو مسئله یکسان است. این نتیجه نشان می‌دهد که Deg3 - CLIQUE نیز NP - complete است.
توضیح: منظور از پارامتر g در گراف G این است که خوشه‌ای (CLIQUE) از مرتبه g در G وجود دارد یا خیر.