دانشکده‌ی علوم ریاضی

آنالیز الگوریتم‌ها مدرس: دکتر شهرام خزایی

تمرین سری چهار

گردآورنده : محمدامین رئیسی *مهلت ارسال : ۳۰ اردیبهشت*

سوالات ۱ و ۲، یکی از سوالات ۳ یا ۴، و یکی از سوالات ۵ یا ۶ را تحویل دهید.

پرسش ۱

(۲۰ نمره) دو رشته‌ی s و t در اختیار داریم. می‌گوییم رشته‌ی p زیردنباله‌ای از رشته‌ی q است اگر و تنها اگر بتوان با حذف تعدادی از حروف q، به رشته‌ی p رسید. الگوریتمی از مرتبه‌ی $O(|s| \times |t|)$ ارائه دهید که بزرگ‌ترین رشته‌ای که زیردنباله‌ی s و t است را بیابد.

پرسش ۲

در گراف $G = (V, E)$، به یک زیرمجموعه از یال‌ها مثل $M \subseteq E$، تطابق کامل می‌گوییم اگر و تنها هر راس $v \in V$، دقیقا به یک یال در M متصل باشد.
حال با توجه به تعریف، به سوالات زیر پاسخ دهید:

آ) (۲۰ نمره) الگوریتمی از مرتبه‌ی $O(|V|)$ برای پیدا کردن تعداد تطابق‌های کامل یک درخت ارائه کنید.
ب) (۲۰ نمره) الگوریتمی از مرتبه‌ی $O(|V| \times |E| \times 2^{|V|})$ برای پیدا کردن تعداد تطابق‌های کامل یک گراف دوبخشی پیدا کنید.

پرسش ۳

(۲۰ نمره) یک جدول $n \times m$ داریم که هر خانه‌ی آن، با یکی از دو رنگ قرمز یا آبی رنگ شده‌است. الگوریتمی از مرتبه‌ی $O(nm)$ ارائه دهید که بزرگ‌ترین زیرجدول تک‌رنگ این جدول را پیدا کند.

پرسش ۴

(۲۰ نمره) n کار و m دستگاه در اختیار داریم. برای استفاده از دستگاه i ام، باید q_i واحد پرداخت کنیم و با انجام کار i ام، p_i واحد دریافت می‌کنیم. برای انجام هر کار نیاز به خرید تعدادی از دستگاه‌ها داریم اما زمانی که یک دستگاه را خریداری می‌کنیم، می‌توانیم از آن برای انجام چندکار استفاده کنیم. به کمک مساله‌ی شار بیشینه (برش کمینه)، الگوریتمی برای انتخاب دستگاه‌های خریداری شده و کارهای انجام شده ارائه دهید که منجر به بیش‌ترین سود ممکن شود.

پرسش ۵

(۲۰ نمره) گراف وزن‌دار و بدون جهت G را در نظر بگیرید. در این گراف، به هر راس و هر یال، وزنی طبیعی نسبت داده شده‌است. برای هر زیرگراف مثل H در G، وزن H را برابر مجموع وزن یال‌های H منهای وزن راس‌های H تعریف می‌کنیم. مساله‌ی پیدا کردن زیرگراف با وزن بیشینه در G را به مساله‌ی قبل کاهش دهید.

پرسش ۶

(۲۰ نمره) می‌خواهیم یک دنباله‌ی $a_1, a_2, ..., a_n$ از اعداد صحیح بسازیم که تعدادی قید را ارضا کند. قید i ام با چهار عدد l_i، r_i، x_i و $type_i$ مشخص می‌شود که $1 \leq l_i \leq r_i \leq n$ و $type_i \in \{0, 1\}$ است. هم‌چنین x_i یک عدد صحیح می‌باشد. در صورتی که $type_i = 0$ باشد، باید شرط زیر روی دنباله برقرار باشد:

$$a_{l_i} + a_{l_i+1} + ... + a_{r_i} \leq x$$

و اگر $type_i = 1$ باشد، باید قید زیر روی دنباله ارضا شود:

$$a_{l_i} + a_{l_i+1} + ... + a_{r_i} \geq x$$

مساله‌ی پیدا کردن چنین دنباله‌ای (و در صورت امکان‌پذیر نبودن، اعلام آن) را به مساله‌ی کوتاه‌ترین مسیر در گراف کاهش داده و آن را با الگوریتم بلمن‌فورد حل کنید.