



دانشکده‌ی علوم ریاضی



مدرس: دکتر شهرام خزایی

آنالیز الگوریتم‌ها

تمرین سری سوم

مهلت ارسال: ۱ اردیبهشت

گردآورنده: صبا مولایی

پرسش ۱

(۲۰ نمره) فرض کنید می‌خواهیم در الگوریتم هافمن حروف را به جای اعداد باینتری با اعداد ترنری (۰ و ۱ و ۲) کدگذاری کنیم. الگوریتم هافمن را به این حالت تعمیم دهید و اثبات کنید جواب بهینه می‌دهد.

پرسش ۲

(۲۰ نمره) یک گراف همبند وزن‌دار داریم. الگوریتمی برای پیدا کردن درخت پوشای بیشینه در این گراف (درخت پوشا با بیشترین وزن)، ارائه کنید.

پرسش ۳

(۲۰ نمره) n فرد در یک اتاق هستند. این افراد به دنبال حل یک معما هستند. این معما n سرنخ دارد و فقط با دانستن تمام سرنخ‌ها حل می‌شود. در ابتدا به هر فرد در این اتاق یک سرنخ داده می‌شود. در هر مرحله یک فرد می‌تواند تمام سرنخ‌هایی را که می‌داند، در یک پیام نوشته و به یک فرد دیگر بدهد. الگوریتمی حریصانه برای ارسال پیام ارائه کنید که با کمترین تعداد پیام، تضمین کند معما برای همه افراد اتاق حل شده‌است.

پرسش ۴

(۲۰ نمره) در این سوال الگوریتمی جدید برای پیدا کردن درخت پوشای کمینه، ارائه می‌کنیم. این الگوریتم بر پایه ویژگی زیر است:
یک دور از گراف را انتخاب کنید. فرض کنید e سنگین‌ترین یال در آن دور باشد. در این صورت یک درخت پوشای کمینه وجود دارد که شامل این یال نیست.
آ درستی این ویژگی را اثبات کنید.

ب) الگوریتم جدید MST به صورت زیر است. ورودی یک گراف بدون جهت $G = (V, E)$ به فرم لیست مجاورت با وزن یالهای $\{w_e\}$ است.

- 1 sort the edges according to their weights
- 2 **for** each edge $e \in E$, in decreasing order of w_e :
- 3 **if** e is part of a cycle of G :
- 4 $G = G - e$ (that is, remove e from G)
- 5 return G

درستی این الگوریتم را اثبات کنید.

پ) در هر بار تکرار حلقه، الگوریتم باید وجود یک یال مشخص در یک دور را چک کند. الگوریتمی با زمان اجرای خطی برای این کار ارائه دهید و درستی آن را اثبات کنید.
ت) زمان اجرای کل الگوریتم MST جدید را محاسبه کنید.

پرسش ۵

(۲۰ نمره) در یک کشور n شهر و بین هر دو شهر یک جاده‌ی مستقیم وجود دارد. می‌خواهیم این کشور را به k استان تقسیم کنیم و برای هر استان یک مرکز استان انتخاب کنیم. طوری که بیشترین فاصله شهرها تا مرکز استان آن‌ها کمترین مقدار ممکن شود. فرض کنید جواب بهینه d باشد. یعنی راهی برای تقسیم‌بندی باشد که هر شهر تا مرکز استان آن، حداکثر d کیلومتر فاصله داشته باشد و با هیچ روش تقسیم‌بندی دیگری حداکثر فاصله کمتر نشود. الگوریتمی ارائه دهید که k مرکز استان پیدا کند به طوری که فاصله هر شهر تا مرکز استان آن حداکثر $2d$ باشد. درستی الگوریتم خود را اثبات کنید.
(برای حل این سوال می‌توانید از منابع اینترنتی کمک بگیرید.)