



نظریه زبان‌ها و اتوماتا

تمرین سری دو

دکتر امیر دانشگر
پاییز ۱۴۰۲ - ۱۴۰۳

تاریخ انتشار: ساعت ۲۳:۵۹ روز ۲۴ مهر
مهلت تحویل: ساعت ۲۳:۵۹ روز ۸ آبان

لطفا پیش از پاسخ‌دادن به تمرین‌ها به نکات زیر توجه کنید:

- تمرین از دو بخش تمرین‌های تحویلی و تمرین‌های غیرتحویلی تشکیل شده است. توصیه می‌شود که همه تمرین‌ها را حل کنید و اگر کفایت نداشته باشد از تمرینات منبع درسی نیز استفاده کنید. تمرین‌های تحویلی بازبینی می‌شوند و ممکن است بازخوردهایی در مورد حل‌های شما به شما داده شود.
- در صورتی که در مورد تمرین‌ها پرسش یا ابهامی داشتید می‌توانید این ابهامات را از سردستیار آموزشی درس بپرسید. برای این کار می‌توانید از ایمیل یا گروه تلگرامی درس استفاده نمایید.
- رعایت اصول اخلاق حرفه‌ای و آداب علمی و آکادمیک از واجبات هر نوع فعالیت آموزشی و علمی است. لذا، لازم است دانشجویان در پایبندی به این اصول کوشا باشند و در تاکید به آن‌ها بکوشند. بدیهی است مسئولیت عواقب ناشی از عدول از این اصول یا مشخص شدن عدم رعایت آن‌ها در مستندات تحویلی متوجه شخص دانشجو خواهد بود.
- برای مرتبط کردن بخش‌های مختلف یک اثبات، به‌جای استفاده از پیکان، از کلمات استفاده کنید. همچنین برای هر منظور از سورها (\forall , \exists) استفاده نکنید. پاسختان به پرسش‌ها باید همراه با توضیحات کافی باشد که مصحح بتواند راه‌حل شما را متوجه شود. متن کتاب مرجع را الگو قرار دهید و پاسختان را طوری بنویسید که هر کسی بتواند آن را دنبال کند و متوجه شود.
- پاسختان را در فایل با نام شماره دانشجوییتان در سامانه اپلود کنید. فرمت فایل ارسالی باید به‌صورت **.pdf** باشد. اگر از پاسختان عکس می‌گیرید در نور مناسب این کار را نکنید و توجه کنید که تصویر واضح باشد. فایل ارسالی شما نباید نیاز به چرخاندن (rotation) داشته باشد. توجه کنید که پاسخ‌هایی که موارد قبل در آن رعایت نشده باشند یا ناخوانا باشند تصحیح نخواهند شد.



پرسش ۱

(تمرین تحویلی)

برای هر یک از زبان‌های داده شده مانند L ، زبان L^* را توصیف کرده و درستی توصیف خود را اثبات کنید.

- $\Sigma_1 = \{a\}, L_1 = \{aa, aaa\}$
- $\Sigma_2 = \{a, b\}, L_2 = \{a, b\}^*$
- $\Sigma_3 = \{a, b\}, L_3 = \{a, ab, ba\}$
- $\Sigma_4 = \{a, b, c\}, L_4 = \{ab, ac, ba, bc, ca, cb\}$
- $\Sigma_5 = \{a, b, c, d, e\}, L_5 = \{bb, ae, ab, db, be, de, cb, ce\}$
- $\Sigma_6 = \{a, b, c, d, e, f\}, L_6 = \{\}$

پرسش ۲

(تمرین غیرتحویلی)

برای یک زبان دلخواه A ، تعریف می‌کنیم:

$$A^+ = \bigcup \{L^k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

$$A^* = \bigcup \{L^k \mid k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

که در آن A^k تعریفی بازگشتی به این شکل دارد که حالت‌های پایه آن $A^0 = \{\lambda\}$ و $A^1 = A$ می‌باشند و برای هر $k \geq 2$ تعریف می‌کنیم:

$$A^k = \{xy \mid x \in A^{k-1}, y \in A\}^1$$

دقت کنید که طبق این تعریف، کلمه پوچ λ که طولی برابر با صفر دارد، همواره عضوی از A^* خواهد بود.

با این تعاریف، شرطی لازم و کافی برای زبان A بیابید که رابطه $A^+ = A^*$ در آن برقرار باشد.

پرسش ۳

(تمرین تحویلی)

برای هر یک از مجموعه‌های زیر که به صورت عامیانه بیان شده‌اند، توصیفی دقیق به شکل یک زبان (با استفاده از نظریه مجموعه‌ها، عبارات منطقی و تعاریفی که تاکنون از زبان‌ها آموخته‌اید) ارائه کنید، سپس مسئله عضویتی برای آن طراحی کنید و پارامترهای آن را نام ببرید.

- مجموعه تمامی رشته‌های دودوئی که با رشته ۰۱۰ شروع شده و با رشته ۱۰۱ به پایان می‌رسند.
- مجموعه تمامی رشته‌های دودوئی که رشته ۱۱۱ زیررشته‌ای از آن‌ها می‌باشد.
- مجموعه تمامی رشته‌های دودوئی که رشته ۰۱۱ زیردنباله‌ای از آن‌ها می‌باشد.

^۱می‌توان گفت A^k مجموعه تمام رشته‌هایی است که از k بار الحاق اعضای A حاصل می‌شود.



پرسش ۴

(تمرین غیر تحویلی)

برای دو مجموعه دلخواه A و B ، عملگر الحاق دو مجموعه را تعریف می‌کنیم:

$$A||B = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$$

که گاهی به اختصار برای آن از نمادگذاری ساده‌تر AB به جای $A||B$ نیز استفاده می‌نماییم.

حال با استفاده از تعریف فوق نشان دهید مجموعه زیر دقیقاً همه رشته‌هایی که تعداد یک‌های آن زوج است را نشان می‌دهد.

$$\{\{0\}^*1\{0\}^*1\{0\}^*\}^*$$

پرسش ۵

(تمرین تحویلی)

فرض کنید A و B دو زبان باشند که $\lambda \notin A$. همچنین فرض کنید X زبانی باشد که رابطه تساوی

$$X = AX \cup B$$

برای آن برقرار باشد. نشان دهید $X = A^*B$.

پرسش ۶

(تمرین غیر تحویلی)

رتبه یک زبان منظم L کوچک‌ترین عدد صحیح است که برای آن داریم

$$L^k = L^{k+1}$$

و اگر چنین عددی وجود نداشته باشد، رتبه L را ∞ در نظر می‌گیریم. نشان دهید رتبه زبان منظم ناتهی L متناهی است، اگر و تنها اگر عدد صحیحی مانند i وجود داشته باشد به طوری که $L^i = L^*$ و در این حالت رتبه L کوچک‌ترین i است که این خاصیت برای آن برقرار است.