



## پرسش ۱

فرض کنید  $G$  گرافی با  $m$  یال باشد. ثابت کنید رئوس  $G$  را می توان به دو مجموعه ی  $V_1, V_2$  افراز کرد به طوری که تعداد یال هایی که یک سرشان در  $V_1$  و یک سرشان در  $V_2$  است حداقل  $\frac{m}{4}$  باشد.

## پرسش ۲

ثابت کنید برای هر  $n$  گرافی  $2n$  راسی داریم که دنباله درجاتش  $1, 1, 2, 2, \dots, n, n$  است.

## پرسش ۳

$G$  گراف ساده ایست که  $diam(G) \geq 3$ . ثابت کنید  $diam(\overline{G}) \leq 3$ .

## پرسش ۴

ثابت کنید یک گراف دوبخشی است اگر و تنها اگر دور فرد نداشته باشد.

## پرسش ۵

با  $m$  عدد متمایز روی هر یال از گراف کامل  $2006$  راسی یک عدد می گذاریم به طوری که هر مثلث با دو یال مساوی، یال سومی با عدد بزرگتر از آنها داشته باشد. حداقل  $m$  را بیابید.

## پرسش ۶

نشان دهید اندازه ی یک تطابق ماکسیمال حداقل نصف تطابق ماکسیمم است.

## پرسش ۷

ثابت کنید هر گراف دو بخشی همبند یک تطابق حداقل به سائز  $\frac{|E(G)|}{\Delta(G)}$  دارد.

## پرسش ۸

گراف  $k$ -منظم مثال بزنید که تطابق کامل نداشته باشد.

## پرسش ۹

$G = (X, Y)$  گرافی دوبخشی است که برای هر دو راس  $x \in X$  و  $y \in Y$  داریم،  $d_G(x) \geq d_G(y)$ . ثابت کنید این گراف تطابقی دارد که رئوس  $X$  را می پوشاند.

## پرسش ۱۰

فرض کنید  $k$  عددی طبیعی و  $G = (X, Y)$  گرافی دوبخشی باشد به صورتی که  $|Y| = k|X|$ . اگر برای هر  $S \subseteq X$  داشته باشیم  $|N(S)| \geq k|S|$ ، ثابت کنید می توان رئوس  $G$  را با  $K_{1,k}$  های مجزای راسی پوشاند.

## پرسش ۱۱

فرض کنید  $G$  گرافی  $k$ -منظم و دوبخشی باشد و  $k \geq 2$ . ثابت کنید  $G$  فاقد یال برشی است.

## پرسش ۱۲

گرافی با رئوس سیاه و سفید داریم. در هر مرحله یک راس را انتخاب می کنیم و رنگ آن راس و تمام همسایه هایش را برعکس می کنیم. اگر با گراف  $G$  که تمام رئوسش سفید هستند شروع کنیم می توانیم رنگ تمام رئوس را سیاه کنیم؟

## پرسش ۱۳

گرافی از مرتبه زوج داریم که درجه ی تمام رئوس آن ۶ می باشد. ثابت کنید می توان یال های این گراف را آبی و قرمز کرد به طوری که از هر راس دقیقاً ۳ یال آبی و ۳ یال قرمز خارج شده باشد.

## پرسش ۱۴

(ا) ثابت کنید گراف  $G$  یک درخت است اگر و تنها اگر همبند باشد و هر یال آن یال برشی باشد.  
(ب) ثابت کنید گراف  $G$  یک درخت است اگر و تنها اگر با اضافه کردن هر یال بین رئوس  $G$  دقیقاً یک دور ایجاد شود.

## پرسش ۱۵

ثابت کنید هر گراف از درجه  $n$  که دارای  $m$  یال است حداقل  $m - n + 1$  دور دارد.

## پرسش ۱۶

$T$  درختی از درجه  $n$  است و یک راس از درجه هر  $i$  که  $2 \leq i \leq k$  دارد و  $n - k + 1$  راس دیگر برگ هستند.  $n$  را بر حسب  $k$  به دست آورید.

### پرسش ۱۷

اگر  $T, T'$  زیردرخت‌های فراگیر از گراف همبند  $G$  باشند و  $e \in E(T) - E(T')$  ثابت کنید یال  $e' \in E(T') - E(T)$  وجود دارد به طوری که  $T - e + e'$  یک زیردرخت فراگیر از  $G$  باشد.

### پرسش ۱۸

(آ) اگر  $T$  درختی با  $k$  یال باشد و  $G$  گرافی باشد که  $\delta(G) \geq k$ ، ثابت کنید  $T$  زیرگراف  $G$  است.  
(ب)  $T$  درختی با  $k$  یال است و  $G$  گرافی از درجه  $n$  است که بیش از  $\binom{k}{2} - (k-1)n$  یال دارد. اگر  $n > k$  ثابت کنید  $T \subseteq G$ .