ریاضیات گسسته

نیم‌سال دوم ۱۳۹۹-۱۴۰۰

مدرس: خانم عقبایی

دانشکده علوم ریاضی

تمرین تحویلی: سری پنجم

مهلت تحویل: ۲ خرداد

پرسش ۱

برای اعداد طبیعی m, n، $f(m,n)$ تعداد nتایی‌های $(x_1, x_2, ..., x_n)$ از اعداد صحیح است که $m \geq |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$. ثابت کنید $f(m,n) = f(n,m)$.

پرسش ۲

با استفاده از ارقام ۱،۲،۳،۴ چند دنباله‌ی ۱۰ رقمی می‌توان نوشت که اختلاف هر دو رقم متوالی‌اش ۱ باشد؟

پرسش ۳

نشان دهید تعداد دنباله‌های به طول n از اعداد صحیح به طوری که $1 \leq a_{i-1} \leq a_i \leq i$ با تعداد دنباله‌های به طول $n-1$ از اعداد صحیح به طوری که $1 \leq a_{i-1} < a_i \leq 2i$ برابر است.

پرسش ۴

رابطه‌ی بازگشتی زیر را حل کنید.

$$a_n = 4a_{n-1} + 4a_{n-2} + (n+1)2^n \qquad a_0 = 0, \quad a_1 = 1$$

پرسش ۵

فرض کنید S مجموعه‌ی تمام سه تایی‌های (i,j,k) از اعداد صحیح مثبت باشد به طوری که $i + j + k = 29$. حاصل عبارت زیر را حساب کنید.

$$\sum_{(i,j,k) \in S} ijk$$

پرسش ۶

ثابت کنید به ازای هر دو عدد طبیعی n, k تعداد افرازهای n به اجزا به طوری که هر جز حداکثر k بار ظاهر شده باشد برابر است با تعداد افرازهای n به اجزای غیر بخش‌پذیر بر $k+1$.

پرسش‌های امتیازی

نمره‌ی هر کدام از پرسش‌های امتیازی برابر ۳ تقسیم بر تعداد کسانی که نمره‌ی بیشتر از صفر از آن پرسش می‌گیرند می‌باشد. این نمره برای جبران تمرین‌های تحویلی در نظر گرفته شده و به مجموع نمرات تمرین تحویلی شما اضافه خواهد شد ولی نمره‌ای اضافه بر ۸ نمره‌ی تمرین تحویلی ندارد.

پرسش ۱

یک تاس را پنج بار پرتاب می‌کنیم. در چند حالت مجموع اعداد ظاهر شده برابر ۲۱ می‌باشد؟

پرسش ۲

تعداد اعداد n رقمی در مبنای ۳ را بیابید به طوری که دارای فرد رقم ۰ و زوج رقم ۱ باشند.

پرسش ۳

$\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ و $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ دو زیرمجموعه‌ی نامساوی از اعداد طبیعی هستند. می‌دانیم دو مجموعه‌ی زیر، دو مجموعه‌ی $\binom{n}{2}$ عضوی و برابر هستند. ثابت کنید n توانی از ۲ است.

$$\{a_i + a_j | 1 \leq i < j \leq n\} = \{b_i + b_j | 1 \leq i < j \leq n\}$$