ریاضیات گسسته
نیم‌سال دوم ۱۳۹۹-۱۴۰۰
مدرس: خانم عقبایی

دانشکده علوم ریاضی

پاسخنامه تمرین تحویلی: سری دوم

پرسش ۱

ثابت کنید از میان هر $۲^{n+۱}$ عدد طبیعی می‌توان ۲^n عدد را طوری انتخاب کرد که مجموعشان بر ۲^n بخش‌پذیر باشد.

راه حل.

روی n استقرا می‌زنیم. برای پایه‌ی $n = ۱$ باید از هر $۴ = ۲^{۱+۱}$ عدد، $۲ = ۲^۱$ عدد یافت که مجموعشان بر $۲ = ۲^۱$ بخش‌پذیر باشد. به وضوح طبق اصل به وضوح طبق اصل لانه کبوتری می‌توان دو عدد از بین چهار عدد یافت که زوجیت یکسان داشته و مجموعشان بر ۲ بخش پذیر است. پس پایه‌ی استقرا برقرار است.

حال فرض کنید حکم استقرا برای k برقرار باشد. ثابت می‌کنیم برای $k + ۱$ نیز برقرار است. $۲^{(k+۱)+۱}$ عدد را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم که هر قسمت $۲^{k+۱}$ عدد دارد. طبق فرض استقرا در هر یک از این گروه‌ها ۲^k عدد یافت می‌شود که مجموعشان بر ۲^k بخش‌پذیر است. پس از هر یک از این گروه‌ها، ۲^k عدد باقی می‌ماند که روی هم می‌شود $۲^{k+۱}$ عدد.طبق فرض استقرا از بین این اعداد ۲^k عدد یافت می‌شود که مجموع آن‌ها بر ۲^k بخش‌پذیر باشد. پس ما سه مجموعه ۲^k تایی از اعداد را پیدا کردیم که مجموعشان بر ۲^k بخش‌پذیر است. این مجموعه‌ها را با $S_۱, S_۲, S_۳$ نشان داده، و تعریف می‌کنیم $\phi_i = \sum_{a \in S_i} a_i$. داریم $\phi_۱ = ۲^k \phi'_۱$ ، $\phi_۲ = ۲^k \phi'_۲$ ، $\phi_۳ = ۲^k \phi'_۳$. طبق اصل لانه کبوتری دو تا از ϕ'_i ها زوجیت یکسان دارند (*). فرض کنید این دو $\phi'_۱, \phi'_۲$ باشند. داریم:

$$\phi_۱ + \phi_۲ = ۲^k \phi'_۱ + ۲^k \phi'_۲ = ۲^k(\phi'_۱ + \phi'_۲) \overset{(*)}{=} ۲^k(۲t) = ۲^{k+۱}t$$

پس $۲^{k+۱}$ مجموع $\phi_۱$ و $\phi_۲$ را می‌شمارد. پس مجموعه‌ی $S = S_۱ \cup S_۲$ که مجموعه‌ای $۲^{k+۱}$ عضوی است، در شرط مسئله صدق می‌کند و ما از بین $۲^{(k+۱)+۱}$ عدد، $۲^{k+۱}$ تا پیدا کردیم که مجموعشان بر $۲^{k+۱}$ بخش‌پذیر باشد. این استقرا را کامل می‌کند.

پرسش ۲

ثابت کنید به ازای هر عدد n طبیعی جدولی $۲^n \times ۲^n$ وجود دارد که با اعداد ۱ ,۰ پر شده باشد و هر دو سطر دقیقا در $۲^{n-۱}$ خانه اختلاف داشته باشند.

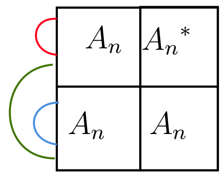
راه حل.

برای $n = ۱$ جدول به شکل

۰ ۱

۱ ۱

را ارائه می کنیم.فرض می کنیم حکم برای n برقرار باشد . جدول آن را A_n می نامیم. همچنین جدول ${A_n}^*$ را جدولی تعریف می کنیم که تمام اعداد آن برعکس A_n باشد (۱ برعکس ۰ است) ادعا می کنیم جدول مناسب برای $n+۱$:



است. باید سه حالت مختلف را چک کنیم :

۱) دو سطر از نیمه ی پایین (فلش آبی) : طبق فرض استقرا در خانه های نیمه ی راست ، $۲^{n-۱}$ تفاوت و در خانه های نیمه ی چپ هم $۲^{n-۱}$ تفاوت داریم در نتیجه در کل ۲^n تفاوت داریم.

۲) دو سطر از نیمه ی بالا (فلش قرمز) : طبق فرض استقرا در خانه های نیمه ی راست ، $۲^{n-۱}$ تفاوت و در خانه های نیمه ی چپ هم $۲^{n-۱}$ تفاوت داریم در نتیجه در کل ۲^n تفاوت داریم.

۳) یک سطر از نیمه ی بالا و یک سطر از نیمه ی پایین (فلش سبز) :

حالت اول: دو سطر دقیقا ۲^n سطر فاصله داشته باشند که در نتیجه در خانه های سمت راست دقیقا ۲^n تفاوت داریم و درخانه های سمت چپ یکسانند . در نتیجه در کل ۲^n تفاوت داریم.

حالت دوم: دو سطر $k \neq ۲^n$ سطر فاصله داشته باشند در نتیجه در خانه های سمت راست $۲^{n-۱}$ تفاوت و در خانه های نیمه ی چپ هم $۲^{n-۱}$ تفاوت داریم که درنتیجه ۲^n تفاوت داریم.

علت (۲) و حالت دوم (۳) :

چون هر سطر A_n با سطر دیگرش در $۲^{n-۱}$ خانه تفاوت داشته و در $۲^{n-۱}$ خانه یکسان است. پس ${A_n}^*$ هم به جز در سطر متناظر ، با A_n در $۲^{n-۱}$ خانه یکسان بوده و در $۲^{n-۱}$ خانه تفاوت دارد. از آنجا که ${A_n}^*$ برعکس A_n است ، هر دو سطر ${A_n}^*$ نیز دقیقا در $۲^{n-۱}$ خانه تفاوت دارند.

پس حکم برای $n+۱$ نیز برقرار است و مسئله حل می شود.

پرسش ۳

n گلوله با وزن‌های مختلف و یک ترازوی دو کفه‌ای داریم. ثابت کنید با $\lceil \frac{۳n}{۲} \rceil - ۲$ بار استفاده از ترازو می‌توانیم سبک‌ترین و سنگین‌ترین گلوله‌ها را پیدا کنیم.

راه حل.

برای پایه ی $n = ۲$ به وضوح با

$$c_۲ = *\frac{۳ * ۲}{۲} - ۲ = ۱$$

بار وزن کردن به سنگین ترین و سبک ترین وزنه میرسیم. برای پایه ی $n = ۳$ نیز باید هر دو تا از آن ها را با هم مقایسه کنیم که میشود ۳ وزن کردن که دقیقا برابر است با $c_۳ = \frac{۳*۳}{۲} - ۲$ حال فرض کنید برای هر $n \leq k \leq ۱$ حکم برقرار باشد. میخواهیم ثابت کنیم برای $n + ۱$ نیز برقرار است. $n + ۱$ وزنه را به دو بخش ۲ وزنه ای و $n - ۱$ وزنه ای تقسیم میکنیم. میدانیم با $\frac{۳(n-۱)}{۲} - ۲$ وزن کردن به دو وزنه ی سنگین و سبک این $n - ۱$ وزنه میرسیم. حال دو وزنه ی دیگر را مقایسه کرده، وزنه سنگین تر را با سنگین ترین وزنه $n - ۱$ وزنه قبلی و وزنه سبکتر را با سبکترین وزنه $n - ۱$ وزنه قبلی مقایسه میکنیم. پس با سه وزن کردن دیگر به خواسته ی مسئله میرسیم. پس کل وزن کردن های ما برابر $c_{n-۱} = \frac{۳(n-۱)}{۲} - ۲ + ۳$ است. از طرفی :

$$c_{n-۱} = \frac{۳(n-۱)}{۲} - ۲ + ۳ = \frac{۳(n-۱)}{۲} + ۳ - ۲ = \frac{۳(n-۱)+۳*۲}{۲} - ۲ =$$
$$\frac{۳(n+۱)}{۲} - ۲ = c_{n+۱}$$

که برابر حکم مسئله است. با دو پایه $n = ۲, ۳$ نیز، حکم برای تمام اعداد زوج و فرد اثبات میشود.

پرسش ۴

آ) آیا می‌توان اعداد ۱ تا n را طوری روی یک خط چید به طوری که میانگین هیچ دو عددی بینشان نیامده باشد؟
ب) نشان دهید بی نهایت عدد طبیعی n وجود دارد که بتوان اعداد $۱, ۲, \ldots, n^۲$ را در یک جدول $n \times n$ قرار داد طوری که میانگین هیچ دو عددی در کوچک ترین مستطیل شامل این دو عدد قرار نگیرد.

راه حل.

آ.

عمل خواسته شده را برای $n = ۲^k$ ها اثبات میکنیم. برای باقی اعداد m کافی است اولین عدد $m < n = ۲^k$ را در نظر گرفته و اعداد اضافه آن را پاک کنیم. پایه استقرا برای $k = ۱$ بدیهی است . فرض کنید حکم برای k برقرار باشد، ثابت میکنیم برای $k + ۱$ نیز برقرار است. میخواهیم اعداد $۱, ۲, ۳, ..., ۲^{k+۱}$ را در یک ردیف بچینیم طوری که میانگین هیچ دو تا از آنها بینشان نباشد. میدانیم این کار را میتوان برای اعداد $۱, ۲, ۳, ..., ۲^k$ انجام داد. فرض کنید دنباله متناظر این اعداد $a_۱, a_۲, ..., a_{۲^k}$ باشد، ادعا میکنیم دنباله متناظر اعداد $۱, ۲, ۳, ..., ۲^{k+۱}$ ، $a_۱, a_۱ + ۲^k, a_۲, a_۲ + ۲^k, ..., a_{۲^k}, a_{۲^k} + ۲^k$ است. (دقت کنید که اعداد $۲^k + ۱, ...۲^{k+۱}$ همان اعداد $۱, ۲, ..., ۲^k$ هستند که با ۲^k جمع شده اند.) حال ثابت میکنیم برای هر دو عدد این دنباله، میانگینشان بینشان قرار ندارد. الف: دو عدد به فرم a_i, a_j: طبق فرض استقرا، میانگینشان بینشان قرار ندارد. ب: دو عدد به فرم $a_i + ۲^k, a_j + ۲^k$: چون اعداد $a_۱ + ۲^k, a_۲ + ۲^k, ..., a_{۲^k} + ۲^k$ همان اعداد $a_۱, a_۲, ..., a_{۲^k}$ اند که با ۲^k جمع شده اند، تمام خواص دنباله $a_۱, a_۲, ..., a_{۲^k}$ برای این دنباله برقرار است. پس طبق فرض استقرا، میانگیشنشان بینشان قرار ندارد. ج: یک عدد به فرم a_i و عدد دیگر به فرم $a_j + ۲^k$: میانگین=

$$\frac{a_i + a_j + ۲^k}{۲} = \frac{a_i + a_j}{۲} + ۲^{k-۱} = a_l + ۲^{k-۱}$$

از آنجا که a_l میانگین a_i, a_j است بینشان قرار ندارد. همچنین میدانیم طبق الگوریتم $a_l + ۲^{k-۱}$ درست سمت راست a_l است. پس $a_l + ۲^{k-۱}$ نیز بین a_i, a_j قرار ندارد و در نتیجه بین $a_i, a_j + ۲^k$ نیز قرار ندارد و حل ما تکمیل میشود.

ب.

ثابت میکنیم برای هر $n = ۲^k$ میتوان این کار را انجام داد. پایه استقرا $k = ۱$:

۳	۴
۱	۲

فرض میکنیم حکم برای k برقرار است. جدول آن را $\boxed{\text{Ak}}$ مینامیم. ادعا میکنیم جدول زیر برای $k + ۱$ مناسب است:

۴Ak-۱	۴Ak
۴Ak-۳	۴Ak-۲

حالات زیر را بررسی میکنیم.

:۰

دو عدد از یک بخش $۴A_k, ..., ۴A_{k-۳}$: طبق فرض استقرا میانگینشان بینشان نیست.

:۱

یک عدد از $۴A_{k-۱}$ یا $۴A_{k-۳}$ و یک عدد از $۴A_k$ یا $۴A_{k-۲}$: میانگین غیرصحیح دارند .

:۲

یک عدد از $۴A_k$ و یک عدد از $۴A_{k-۲}$:

$$a = ۴k \in ۴A_k$$

$$b = ۴k' - ۲ \in ۴A_{k-۲}$$

$$\rightarrow \frac{a+b}{۲} = \frac{۴k + ۴k' - ۲}{۲} = ۲k'' - ۱ \in ۴A_{k-۱} \quad or \quad ۴A_{k-۳}$$

:۳

یک عدد از $۴A_{k-۱}$ و یک عدد از $۴A_{k-۳}$:

$$a = ۴k - ۱ \in ۴A_{k-۱}$$

$$b = ۴k' - ۳ \in ۴A_{k-۳}$$

$$\rightarrow \frac{a+b}{۲} = \frac{۴k + ۴k' - ۱ - ۳}{۲} = ۲k'' - ۲ \in ۴A_{k} \quad or \quad ۴A_{k-۲}$$

پس میانگین این دو عدد در بخشی مجزا از آنان است. پس در تمامی حالات حکم برقرار بوده و مثال ارائه شده برای بی نهایت k طبیعی صحیح میباشد.

پرسش ۵

فرض کنید اعداد طبیعی $w_1, w_2, \ldots, w_n$ وزن n وزنه باشند. به این مجموعه از وزنه‌ها **کامل** می‌گوییم اگر برای هر عدد طبیعی W که کوچک‌تر از $w_1 + w_2 + \cdots + w_n$ است، مجموع وزن تعدادی از این وزنه‌ها برابر W شود. ثابت کنید اگر از یک مجموعه وزنه‌ی کامل، یک وزنه با سنگین‌ترین وزن را حذف کنیم، مجموعه وزنه‌ی باقی‌مانده نیز کامل است.

راه حل.

ادعا: مجموعه $w_1 \leq w_2 \leq \ldots \leq w_n$ کامل است اگر و تنها اگر $w_1 = 1$ و برای هر $i \geq 2$: $w_i \leq \Sigma_{j=1}^{i-1} = w_j + 1$. اگر $w_1 > 1$ باشد عدد ۱ توسط وزنه ها تولید نمی شود. اگر هم برای i ای ، $w_i > \Sigma_{j=1}^{i-1} w_j + 1$ باشد، آنگاه عدد $\Sigma_{j=1}^{i-1} w_j + 1$ هیچگاه تولید نمی شود. پس این شرط لازم است. حال ثابت میکنیم کافی است. پایه استقرا برای $n = 1$ است که بدیهی می باشد. حال فرض کنید برای n حکم برقرار است. یعنی اگر $w_1 \leq w_2 \leq \ldots \leq w_n$ کامل باشند ، $w_1 \leq w_2 \leq \ldots \leq w_{n+1}$ نیز کامل است و برای هر $w \leq \Sigma_{i=1}^{n} = w_i$ ، میتوان w را به صورت جمع تعدادی w_i نوشت. حال باید ثابت کنیم برای $\Sigma_{i=1}^{n} w_i < W \leq \Sigma_{i=1}^{n+1} w_i$ نیز میتوان این کار را با $n + 1$ وزنه انجام داد. از کل نامساوی ها مقدار w_{n+1} را کم میکنیم:

$$\Sigma_{i=1}^{n} w_i - w_{n+1} < w - w_{n+1} = W' \leq \Sigma_{i=1}^{n} w_i$$

سمت چپ نامساوی نیز چون $w_{n+1} \leq \Sigma_{j=1}^{n} w_j + 1$ است ، مینیمم -1 دارد. پس داریم

: $0 \leq W' \leq \Sigma_{i=1}^{n} w_i$

اگر w' برابر صفر شود، برای ساخت w تنها از وزنه w_{n+1} استفاده میکنیم. در باقی حالات می توانستیم w' را به صورت مجموعی از اعضای $w_1 \leq \ldots \leq w_n$ بنویسیم. حال تنها w_{n+1} را نیز به آنها اضافه میکنیم تا به وزن w برسیم. پس توانستیم تمام وزن های کمتر از $\Sigma_{i=1}^{n+1} w_i$ را با $w_1 \leq \ldots \leq w_{n+1}$ بسازیم و این مجموعه یک مجموعه کامل است که با حذف w_{n+1} نیز کامل میماند. این حکم را نتیجه میدهد.

پرسش ۶

یک جدول $n \times m$ داریم که هر خانه‌ی آن با یکی از رنگ‌های آبی یا قرمز رنگ شده است. ثابت کنید هرطور که این رنگ‌آمیزی اتفاق بیفتد، یکی از رنگ‌ها هست که بتوانیم با یک وزیر از یکی از خانه‌های آن شروع کنیم و بدون توقف در خانه‌های رنگ مخالف به همه‌ی خانه‌های آن رنگ برویم.

راه حل.

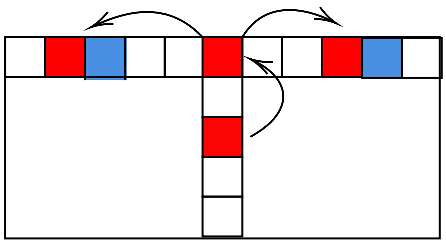
روی تعداد سطر یا ستون های جدول استقرا می زنیم. برای حالت پایه ، برای m دلخواه فرض کنید جدول ۱ $* m$ باشد. به وضوح با شروع از یک نقطه ، با حرکات افقی به سادگی می توانیم به تمام خانه های همرنگ برسیم.

حال فرض کنید حکم برای جدول $m * n$ درست است. می خواهیم ثابت کنیم برای جدول $m * (n + ۱)$ نیز درست است. اگر سطر اضافه شده تک رنگ باشد حکم بدیهی است (یا لازم نیست به آن وارد شویم یا از همه جا می توانیم به آن وارد شویم) پس فرض می کنیم سطر اضافه شده دو رنگ باشد. فرض کنید جدول قبلی را می توانستیم با یک وزیر روی خانه های قرمز پیمایش کنیم. یک خانه قرمز از بالاترین سطر در نظر بگیرید. دو حالت داریم :

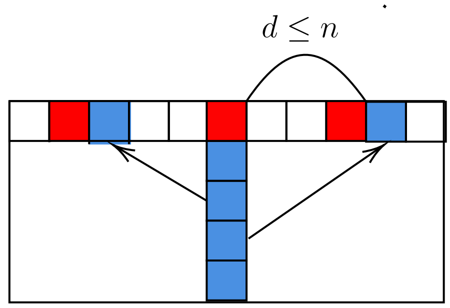
الف) خانه ای قرمز در ستون آن وجود دارد : مطابق شکل از آن خانه قرمز (که طبق فرض استقرا می توان به آن رفت) با حرکت عمودی به سطر بالایی رفته و سپس با حرکات افقی در آن سطر به تمام خانه های قرمز می رویم.

ب) خانه ای قرمز جز همین خانه در ستون آن وجود نداشته باشد : در این حالت به وضوح ، با پیمایش در خانه های آبی با حرکات عمودی در این سطر و حرکات افقی از آن ها ، می توان کل خانه های آبی جدول $m * n$ سابق را دید. حال دقت کنید که از این ستون می توان به تمام خانه های بالا که در فاصله $d \leq n$ از خانه قرمز ما هستند رفت . اگر تمامی این خانه ها قرمز بودند و از این ستون آبی نمی توانستیم به آنها برویم ، الگوریتم را برای تک تک آنها اجرا می کنیم تا یک خانه آبی پیدا شود که با حرکت اریب بتوان به آن رفت . این روند ، قابلیت رفتن به سطر بالا را تضمین کرده و استقرا ثابت می شود.

الف:



ب:



پرسش ۷

ایره‌ای با ۲۰۲۰ نقطه روی آن داریم. نقاط آن به دلخواه با ۲۰ رنگ، رنگ شده است. ما می‌توانیم وترهایی بین این نقاط را به هم وصل کنیم که

۱)دو سر هر وتر هم‌رنگ باشند.

۲)وترها یکدیگر را قطع نکنند.(حتی در نقاط روی دایره)

ثابت کنید می‌توانیم لااقل ۱۰۰ وتر رسم کنیم.

راه حل.

ادعا: برای هر p راس که با c رنگ به هم وصل می‌شوند می‌توان $\frac{p-c}{c}$ وتر رسم کرد که در آن p مضربی صحیح از c است. $(p = nc)$.

برای حالت پایه $p = ۲c$، به وضوح می‌توان $۱ = \frac{۲c - c}{c}$ وتر بین دو راس وصل کرد.

حال فرض کنید حکم برای $n - ۱$ برقرار است. به وضوح طبق اصل لانه کبوتری، رنگی داریم که بیشتر مساوی n راس را رنگ کرده است. فرض کنید این رنگ سیاه است. چند حالت را بررسی می‌کنیم.

الف) دقیقا n راس سیاه داریم. اگر دو راس سیاه داشتیم که بینشان کمتر مساوی $c - ۲$ راس بود، باقی شکل (به جز این ۲ راس و رئوس بینش) ، طبق فرض استقرا $n - ۲$ یال همرنگ داشته که با وصل کردن دو راس سیاه ، به $n - ۱$ یال هم‌رنگ می‌رسیم که همان $\frac{nc - c}{c}$ است.

اگر به ازای هر دو رأس سیاه، بین آن‌ها دقیقا $c - ۱$ راس بود، هر راس سیاه را به صورت ساعت‌گرد به ندیک‌ترین راس سیاه وصل می‌کنیم. با این روش، $\lfloor \frac{n}{۲} \rfloor$ یال کشیده می‌شود. اگر تمام این بخش‌های کوچک را کنار بگذاریم، $\lceil \frac{n}{۲} \rceil (c - ۱)$ راس که با $c - r$ راس رنگ شده‌اند باقی می‌ماند.

طبق فرض استقرا ببین این رئوس می‌توان $\lceil \frac{n}{۲} \rceil - ۱$ یال رسم کرد که با $\lfloor \frac{n}{۲} \rfloor$ یال که از قبل کشیده‌ایم می‌شود $n - ۱$ یال.

ب) بیش از n راس سیاه داریم: در این حالت طبق اصل لانه کبوتری قطعا دو راس سیاه مجاور یافت می‌شود که بینشان کمتر یا مساوی $c - ۲$ راس داشته باشیم. این مشابه حالت الف است و حل مسئله به پایان می‌رسد.

پرسش ۸

فرض کنید $n \geq ۴$ عددی طبیعی باشد. اعداد طبیعی $x_۱, x_۲, \dots, x_n$ دور یک دایره با همین ترتیب قرار گرفته اند طوری که هر عدد مجموع دو عدد مجاورش را می‌شمارد. یعنی

$$\frac{x_{i-۱} + x_{i+۱}}{x_i} = k_i$$

برای هر i عددی صحیح است. $x_۰ = x_n, x_{n+۱} = x_۱$ ثابت کنید

$$۲n \leq k_۱ + k_۲ + \cdots + k_n < ۳n.$$

راه حل.
ابتدا سمت چپ نامساوی را ثابت می‌کنیم:

$$\sum_{i=۱}^{n} k_i = \sum_{i=۱}^{n} \frac{a_{i+۱} + a_{i-۱}}{a_i} = \sum_{i=۱}^{n} \frac{a_{i+۱}}{a_i} + \sum_{i=۱}^{n} \frac{a_{i-۱}}{a_i} = \sum_{i=۱}^{n} \frac{a_i}{a_{i-۱}} + \sum_{i=۱}^{n} \frac{a_{i-۱}}{a_i} \overset{AM-GM}{\geq} ۲n$$

حال سمت راست آن را با استقرا ثابت می‌کنیم:

$$S_n = \sum_{i=۱}^{n} \frac{a_{i+۱} + a_{i-۱}}{a_i} \overset{?}{<} ۳n$$

حالت پایه برای $n = ۳$:

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \overset{?}{<} q$$

حال بدون از دست دادن کلیات فرض کنید $a \geq b \geq c$. حالات زیر را داریم:

- $a = b = c$ بنابراین:

$$\sum_{cyc} \frac{a+c}{b} = b < q$$

- $a > b = c$ یا $a = b > c$ یا $a > b > c$: در این صورت داریم:

$$a > c, b \geq c \Longrightarrow ۲a = a + a > b + c \longrightarrow \frac{b+c}{a} < ۲$$

از طرفی می‌دانیم $\frac{b+c}{a}$ عددی طبیعی است. پس داریم $\frac{b+c}{a} = ۱ \Longleftarrow b + c = a$ بنابراین:

$$\sum_{cyc} \frac{a+b}{c} = \frac{a}{a} + \frac{c+۲b}{c} + \frac{b+۲c}{b} = ۱ + ۱ + ۲\frac{b}{c} + ۱ + ۲\frac{c}{b} = ۳ + ۲(\frac{c}{b} + \frac{b}{c})(*)$$

از طرفی

$$\frac{a+b}{c} \in \mathbb{N} \longrightarrow \frac{c+2b}{c} \in \mathbb{N} \Longrightarrow 1+2\frac{b}{c} \in \mathbb{N} \Longrightarrow \frac{b}{c} = \frac{1}{2}k, k \in \mathbb{Z}$$

از آنجا که $\frac{b}{c} \times \frac{c}{b} = 1$ پس $\{1, 1\}$ یا $\{2, \frac{1}{2}\} = \{\frac{b}{c}, \frac{c}{b}\}$.

پس با جایگذاری آن‌ها به صورت $\frac{b}{c}, \frac{c}{b}$ در $(*)$ خواهیم داشت:

$$\sum_{cyc} \frac{a+b}{c} = 3+4 \ or \ 3+5 < 9$$

پس پایه استقرا برقرار است.

حال فرض کنید حکم برای $n-1$ برقرار است و داریم $S_{n-1} < 3(n-1)$. می‌خواهیم حکم را برای n ثابت کنیم. اگر $a_1 = ... = a_n$ که $S_n = 2n$ می‌شود و مسئله حل است. فرض کنید حداقل دو تا از a_i ها فرق دارند. بیش‌ترین آن‌ها را در نظر بگیرید. چون همه‌ی اعداد برابر نیستند یکی از اینه ماکسیمم همسایه‌ای کوچکتر از خود دارد. بدون از دست دادن کلیات این عدد را a_n در نظر بگیرید. داریم: $2a_n > a_{n-1} + a_1 \Longleftarrow \frac{a_1+a_{n-1}}{a_n} < 2$.

از طرفی ون $\frac{a_1+a_{n-1}}{a_n} \in \mathbb{N}$ است، داریم $\frac{a_1+a_{n-1}}{a_n} = 1 \longrightarrow a_n = a_{n-1} + a_1$. پس داریم:

$$S_n = \frac{a_n + a_2}{a_1} + \frac{a_1 + a_3}{a_2} + ... + \frac{a_{n-2} + a_n}{a_{n-1}} + \frac{a_{n-1} + a_1}{a_n}$$

$$= \frac{a_1 + a_{n-1} + a_2}{a_1} + \frac{a_1 + a_3}{a_2} + ... + \frac{a_{n-2} + a_{n-1} + a_1}{a_{n-1}} + \frac{a_{n-1} + a_1}{a_{n-1} + a_1}$$

$$= 1 + \frac{a_{n-1} + a_2}{a_1} + \frac{a_1 + a_3}{a_2} + ... + \frac{a_{n-2} + a_1}{a_{n-1}} + 1 + 1 = 3 + S_{n-1} < 3 + 3(n-1) = 3n$$

پس حکم استقرا ثابت شد.

پرسش ۹

آیا جایگشت $a_1, a_2, \ldots$ از اعداد طبیعی وجود دارد که برای هر n داشته باشیم

$$n | a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

(دنباله‌ی $a_1, a_2, \ldots$ یک جایگشت از اعداد طبیعی است اگر هر عدد طبیعی دقیقا یک بار در این دنباله ظاهر شود.)

راه حل.

قرار می دهیم $a_1 = 1$ به وضوح $1|a_1$ پس پایه استقرا برقرار است. حال فرض کنید به ازای هر $1 \leq k \leq n$
$k | \sum_{i=1}^{k} a_i$ کوچکترین عددی که در بین اعداد $a_1, a_2, ..., a_n$ نیامده است را m بنامید.
حال چون $gdc(n+1, n+2) = 1$ ، طبق قضیه ی باقی مانده چینی ، دستگاه معادله ی هم نهشتی زیر بی نهایت جواب برای x دارد.

$$x \equiv -(a_1 + ... + a_n) \pmod{n+1} \qquad (1)$$

$$x \equiv -(a_1 + ... + a_n + m) \pmod{n+2} \qquad (2)$$

کوچکترین این جواب ها که در بین $a_1, ..., a_n$ قرار ندارد را برابر a_{n+1} و m را برابر a_{n+2} قرار می دهیم. با توجه به (۱) ، $n+1 | \sum_{i=1}^{k} a_i + x$ و با توجه به (۲) ، $n+2 | \sum_{i=1}^{k} a_i + x + m$ برقرارند. حال از آنجا که در هر مرحله m کوچکترین عددی که تا کنون در دنباله قرار نگرفته انتخاب می شود ، تمام اعداد طبیعی در دنباله ی $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ می آیند و این دنباله وجود دارد.

پرسش ۱۰

فرض کنید a, b, c اعدادی طبیعی باشند که $a \neq c$ و $\frac{a}{c} = \frac{a^۲ + b^۲}{c^۲ + b^۲}$. ثابت کنید $a^۲ + b^۲ + c^۲$ اول نیست.

راه حل.

$$\frac{a}{c} = \frac{a^۲ + b^۲}{c^۲ + b^۲} \Rightarrow ca^۲ + cb^۲ = ac^۲ + ab^۲ \Rightarrow ca^۲ - ac^۲ = ab^۲ - cb^۲ \Rightarrow ac(a-c) = b^۲(a-c) \Rightarrow ac = b^۲$$

(چون $a \neq c$)

پس داریم:

$$X = a^۲+c^۲+b^۲ = a^۲+c^۲+b^۲+ac-ac = a^۲+c^۲+ac+ac-b^۲ = (a+c)^۲-b^۲ = (a+c+b)(a+c-b)$$

اگر داشته باشیم: $a + c - b > ۱$

آنگاه سوال حل است زیرا توانستیم X را به شکل حاصل ضرب دو عدد بزرگ‌تر از ۱ بنویسیم.

پس کافی است حکم سوال را در حالت $a + c - b = ۱$ بررسی کنیم.

می‌دانیم:

$$a + c \geq ۲\sqrt{ac} = ۲\sqrt{b^۲} = ۲b \Rightarrow b + ۱ = a + c \geq ۲b \Rightarrow b = ۱ \Rightarrow a + c = ۲ \Rightarrow a = c = ۱$$

که این تناقض است زیرا فرض سوال $a \neq c$ بود.

پرسش ۱۱

m,n اعداد طبیعی هستند به طوری که $mn|m^۲+n^۲+m$. ثابت کنید m مربع کامل است.

راه حل.

داریم:

$$m|mn \text{ و } mn|m^۲+n^۲+m$$
$$\Rightarrow m|m^۲+n^۲+m \Rightarrow m|n^۲$$

اگر قرار دهیم:

$$gcd(m,n)=d$$
$$m=dm'$$
$$n=dn'$$
$$gcd(m',n')=۱$$

درآن صورت طبق لم اقلیدس خواهیم داشت:

$$m|n^۲ \Rightarrow m'|dn'^۲ \Rightarrow m'|d\ (I)$$

از طرفی:

$$mn|m^۲+n^۲+m \Rightarrow d^۲m'n'|d^۲m'^۲+d^۲n'^۲+dm'$$
$$\Rightarrow dm'n'|dm'^۲+dn'^۲+m'$$
$$\Rightarrow d|dm'^۲+dn'^۲+m' \Rightarrow d|m'\ (II)$$

$$(I) \Rightarrow m' \leq d$$
$$(II) \Rightarrow d \leq m'$$
$$(I),(II) \Rightarrow d=m'$$
$$\Rightarrow m=dm'=d^۲$$

پرسش ۱۲

فرض کنید m, n اعدادی طبیعی باشند که $n \geq m$ ثابت کنید

$$\frac{(m,n)}{n}\binom{n}{m}$$

عددی صحیح است.

راه حل.

طبق قضیه بزو می‌دانیم وجود دارد x و y صحیح به طوری که:

$$xm + yn = gcd(m, n)$$

در نتیجه می‌توان گفت:

$$\frac{gcd(m,n)}{n}\binom{n}{m} = \frac{xm+yn}{n}\binom{n}{m} = \frac{xm}{n}\binom{n}{m} + \tfrac{yn}{n}\binom{n}{m} = \frac{xm}{n}\frac{n!}{m!(n-m)!} + y\binom{n}{m} =$$
$$x\frac{(n-۱)!}{(m-۱)!((n-۱)-(m-۱))!}\binom{n}{m} + y\binom{n}{m} = x\binom{n-۱}{m-۱} + y\binom{n}{m}$$

که می‌دانیم صحیح است.