ریاضیات گسسته

نیم‌سال دوم ۱۳۹۹-۱۴۰۰

مدرس: خانم عقبایی

دانشکده علوم ریاضی

پاسخنامه تمرین تحویلی: سری اول

پرسش ۱

ثابت کنید گزاره‌های زیر همیشه درست هستند.

آ) $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge r) \to q \vee (p \wedge r)$

ب) $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \to (q \vee r)$

پ) $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$

راه حل.

آ) داریم:

$$\begin{aligned}(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge r) &\equiv (\neg p \vee (p \wedge r)) \wedge (q \vee (p \wedge r)) \\ &\equiv ((\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee r)) \wedge (q \vee (p \wedge r)) \\ &\equiv (\neg p \vee r) \wedge (q \vee (p \wedge r))\end{aligned}$$

توجه کنید که اگر گزاره‌ی آخر درست باشد آنگاه $q \vee (p \wedge r)$ نیز باید درست باشد و این یعنی $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge r) \to q \vee (p \wedge r)$ همواره درست است. ■

ب) برای اثبات درستی گزاره کافیست نشان دهیم هرگاه $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$ درست باشد $q \vee r$ نیز درست است. پس فرض کنید $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$ گزاره‌ای درست باشد. پس دو گزاره‌ی $p \vee q$ و $(\neg p \vee r)$ نیز درست‌اند. حال روی درستی p حالت‌بندی می‌کنیم:

اگر p درست باشد چون $\neg p \vee r$ نیز درست است پس r باید درست باشد و این یعنی $q \vee r$ نیز درست است.

اگر p نادرست باشد چون $p \vee q$ نیز درست است پس q باید درست باشد و این یعنی $q \vee r$ نیز درست است.

پس در هر حالت گزاره‌ی $q \vee r$ درست می‌شود پس گزاره‌ی اولیه همواره درست است. ■

پ) برای اثبات درستی گزاره کافیست نشان دهیم هرگاه $(p \to q) \wedge (q \to r)$ درست باشد $p \to r$ نیز درست است. پس فرض کنید $(p \to q) \wedge (q \to r)$ گزاره‌ای درست باشد. پس دو گزاره‌ی $p \to q$ و $q \to r$ نیز درست‌اند. اگر گزاره‌ی p غلط باشد $p \to r$ مستقل از ارزش گزاره‌ی سمت چپ درست خواهد بود. پس فرض کنید p درست باشد. چون $p \to q$ نیز درست است پس q باید درست باشد و از درستی $q \to r$ نتیجه می‌شود که r نیز درست است و این یعنی گزاره‌ی $p \to r$ درست می‌باشد. پس گزاره‌ی اصلی همواره درست است. ■

پرسش ۲

فرض کنید برای هر گزاره P مجموعه‌ی X_P مجموعه عملگرهای استفاده‌شده در P باشد.
برای مثال اگر $P = (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge r) \to q \vee (p \wedge r)$ آن‌گاه $X_P = \{\neg, \wedge, \vee, \to\}$ می‌شود.
آ) ثابت کنید برای هر گزاره‌ی P گزاره‌ی Q معادل با P وجود دارد به طوری که $X_Q \subseteq \{\neg, \wedge\}$
ب) ثابت کنید برای هر گزاره‌ی P گزاره‌ی Q معادل با P وجود دارد به طوری که $X_Q \subseteq \{\neg, \vee\}$
راه حل.
آ) می‌خواهیم عبارتی هم‌ارز با P مانند Q بیابیم به طوری که $X_Q \subseteq \{\neg, \wedge\}$ باشد. فرض کنید Q گزاره‌ای هم‌ارز با P است به طوری که بین همه‌ی گزاره‌های هم‌ارز با P کمترین تعداد عملگر غیر از $\neg$ و $\wedge$ را دارد.
ادعا می‌کنیم Q عملگری به جز $\neg$ و $\wedge$ ندارد.
برای اثبات ادعا از برهان خلف استفاده می‌کنیم و فرض می‌کنیم:

$$Q = P_۱ \circledast_۱ P_۲ \circledast_۲ \cdots \circledast_{k-۱} P_k$$

که در آن $\circledast_i$ ها عملگرهایی به جز $\neg$ و $\wedge$ هستند و همچنین P_i ها گزاره‌هایی هستند که فقط از $\neg$ و $\wedge$ ساخته شدند.
اگر در این عبارت پرانتزگذاری نیز وجود داشت فرض کنید $P_n \circledast_n P_{n+۱}$ بیشترین اولویت را نسبت به سایر این عملگرها داشته باشد.
حال یک ۴تایی ۰،۱ای را برای نتیجه‌ی عملگر $\circledast_n$ بین دو گزاره‌ی P_n و $P_{n+۱}$ تعریف می‌کنیم که بر حسب نتیجه‌ی P_n و $P_{n+۱}$ است.

($P_n, P_{n+۱}$ درست باشد، فقط $P_{n+۱}$ درست باشد، فقط P_n درست باشد، هیچکدام درست نباشند)

برای مثال (۱،۰،۰،۱) بدین معناست که وقتی $P_n, P_{n+۱}$ هر دو غلط یا هر دو درست باشند آنگاه $P_n \circledast_n P_{n+۱}$ درست است و وقتی دقیقا یکی از آن‌ها درست باشد $P_n \circledast_n P_{n+۱}$ غلط است.
حال می‌خواهیم برای هر کدام از ۱۶ حالت $P_n \circledast_n P_{n+۱}$ گزاره‌ای هم‌ارز جایگزینش کنیم که آن گزاره فقط شامل $\neg$ و $\wedge$ باشد.

۱. $(۰, ۰, ۰, ۰) \Rightarrow F$

۲. $(۰, ۰, ۰, ۱) \Rightarrow P_n \wedge P_{n+۱}$

۳. $(۰, ۰, ۱, ۰) \Rightarrow P_{n+۱}$

۴. $(۰, ۱, ۰, ۰) \Rightarrow P_n$

۵. $(۱, ۰, ۰, ۰) \Rightarrow \neg P_n \wedge \neg P_{n+۱}$

حالات دیگر را می‌توان با $\vee$ گرفتن از حالات ۲ تا ۵ به دست آورد و همچنین باید عبارات $x \vee y$ را با $\neg(\neg x \wedge \neg y)$ جایگزین کنیم.
اگر با استفاده از هم‌ارزی‌های بالا در عبارت Q به جای $P_n \circledast_n P_{n+۱}$ گزاره‌ی معادلش که فقط از $\neg$ و $\wedge$ ساخته شده را جایگزین کنیم به گزاره‌ای مانند Q' می‌رسیم که با P هم‌ارز است و تعداد عملگرهای نامطلوبش از Q کمتر است که تناقض است زیرا فرض کرده بودیم Q کمترین تعداد عملگر نامطلوب را در بین گزاره‌های هم‌ارز با P دارد.

تناقض به دست‌آمده نشان می‌دهد ادعای ما درست بوده است. ■

ب) کاملا مشابه فسمت اول سوال است فقط ۵ حالت اصلی $P_n \circledast_n P_{n+1}$ به شکل زیر می‌شوند.

۱. $(0,0,0,0) \Rightarrow F$

۲. $(0,0,0,1) \Rightarrow \neg(\neg P_n \vee \neg P_{n+1})$

۳. $(0,0,1,0) \Rightarrow P_{n+1}$

۴. $(0,1,0,0) \Rightarrow P_n$

۵. $(1,0,0,0) \Rightarrow \neg(P_n \vee P_{n+1})$

برای ساختن بقیه حالات نیز کافیست از حالات ۲ تا ۵، $\vee$ بگیریم.

پرسش ۳

درستی یا نادرستی عبارات زیر را بررسی کنید.

آ) $((((p \vee q) \to \neg p) \to \neg r) \to \neg q) \to (((q \to \neg p) \vee r) \to \neg p) \equiv p \to q$

ب) $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$

پ) $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \equiv \exists x(P(x) \wedge Q(x))$

راه حل.

آ) با حالت‌بندی روی ارزش p نشان می‌دهیم دو گزاره‌ی سمت چپ و راست تساوی همواره هم‌ارزشند:

اگر p نادرست باشد آنگاه گزاره‌ی سمت راست تساوی مستقل از ارزش q یا r درست خواهد بود. برای گزاره‌ی سمت چپ نیز توجه کنید که $((q \vee \neg p) \vee r) \to \neg p$ درست است (هم مقدم و هم تالی گزاره درست می‌باشند) پس گزاره‌ی سمت چپ تساوی نیز مستقل از ارزش q یا r خواهد خواهد بود (سمت چپ یک گزاره‌ی شرطی است که تالی‌اش درست می‌باشد)

اگر p درست باشد گزاره‌ی $(p \vee q) \to \neg p$ نادرست خواهد بود (مقدم درست و تالی نادرست است) پس $((p \vee q) \to \neg p) \to \neg r$ مستقل از ارزش r خواهد بود. حال اگر q درست باشد گزاره‌ی $(((p \vee q) \to \neg p) \to \neg r) \to \neg q$ نادرست خواهد بود پس سمت چپ درست است (مقدم نادرست است). سمت راست نیز درست است زیرا هردوی p, q درستند پس دو طرف تساوی در این حالت هم‌ارزشند. حال فرض کنید q نادرست باشد. در این صورت گزاره‌ی $(((p \vee q) \to \neg p) \to \neg r) \to \neg q$ درست خواهد بود (هم مقدم و هم تالی درست‌اند) همچنین گزاره‌ی $q \to \neg p$ نیز درست می‌شود پس $(q \to \neg p) \vee r$ نیز درست خواهد بود و این یعنی $((q \to \neg p) \vee r) \to \neg p$ نادرست است (مقدم درست و تالی نادرست می‌باشد) پس کل گزاره‌ی سمت چپ نادرست است. توجه کنید که گزاره‌ی سمت راست نیز نادرست است و در این حالت نیز دو طرف تساوی هم‌ارزش هستند و تساوی نتیجه می‌شود. ■

ب) ابتدا توجه کنید که اگر گزاره‌ی A تاتولوژی نباشد هر دو طرف تساوی نادرست خواهند بود و تساوی برقرار است. پس فرض کنید A همواره درست باشد. در این صورت اگر $\forall x P(x)$ درست باشد یعنی $P(x)$ نیز تاتولوژی است و این یعنی $P(x) \wedge A$ همواره درست است و سمت راست درست می‌شود. اگر $\forall x P(x)$ نادرست باشد یعنی یک x در دامنه‌ی مقادیر P وجود دارد که $P(x)$ نادرست باشد پس $P(x) \wedge A$ هم به ازای این x نادرست خواهد بود و این یعنی گزاره‌ی $\forall x(P(x) \wedge A)$ نادرست است و دو طرف تساوی هم ارزش می‌شوند. پس در هر حالت دو طرف تساوی هم‌ارز هستند و تساوی برقرار است. ■

پ) قرار دهید

$$P(x) := \{\text{x مربع کامل است}\}, A(x) := \{\text{x زوج است}\}$$

(دامنه‌ی x اعداد طبیعی است) در این صورت گزاره‌ی $(\exists x P(x)) \wedge A$ نادرست است زیرا A تاتولوژی نیست. ولی گزاره‌ی $\exists x(P(x) \wedge A)$ درست است (برای $x = ۴$ هر دو گزاره‌ی $P(x)$ و $A(x)$ درست هستند) پس تساوی در حالت کلی برقرار نمی‌باشد. ■

پرسش ۴

درستی یا نادرستی عبارات زیر را برای مجموعه‌های دلخواه بررسی کنید.

آ) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ **ب)** $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

پ) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$ **ت)** $A \cup (B \Delta C) = (A \cup B) \Delta (A \cup C)$

راه حل.

آ)

$$\text{if}\,(x,y) \in A \times (B \cap C) \Rightarrow x \in A, \quad y \in B \cap C \Rightarrow x \in A, \quad y \in B, \quad y \in C$$
$$x \in A, \quad y \in B \Rightarrow (x,y) \in A \times B$$
$$x \in A, \quad y \in C \Rightarrow (x,y) \in A \times C$$
$$\Rightarrow (x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C) \Rightarrow A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C) \quad (i)$$

$$\text{if}\,(x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C) \Rightarrow (x,y) \in A \times B \quad (x,y) \in A \times C$$
$$\Rightarrow x \in A, \quad y \in B, \quad y \in C \Rightarrow x \in A, \quad y \in B \cap C \Rightarrow (x,y) \in A \times (B \cap C) \Rightarrow$$
$$(A \times B) \cap (A \times C) \subseteq A \times (B \cap C) \quad (ii)$$

$$(i)\ \&\ (ii) \Rightarrow A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \blacksquare$$

ب)

$$\text{if}\,x \in (A \setminus B) \setminus C \ \Rightarrow x \in A \ \wedge \ x \notin B \ \wedge \ x \notin C \Rightarrow x \in A \ \wedge \ \neg(x \in B \ \vee \ x \in C)$$
$$\Rightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \cup C) \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \cup C \Rightarrow x \in A \setminus (B \cup C) \Rightarrow (A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \cup C) \quad (i)$$

$$\text{if}\,x \in A \setminus (B \cup C) \Rightarrow x \in A \ \wedge \ x \notin B \cup C \Rightarrow x \in A \ \wedge \ \neg(x \in B \cup C)$$
$$\Rightarrow x \in A \ \wedge \ \neg(x \in B \cup C) \Rightarrow x \in A \ \wedge \ x \notin B \ \wedge \ x \notin C \Rightarrow x \in (A \setminus B) \setminus C$$
$$\Rightarrow A \setminus (B \cup C) \subseteq (A \setminus B) \setminus C \quad (ii)$$

$$(i)\ \&\ (ii) \Rightarrow A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C \blacksquare$$

پ)

$$\text{if}\,x \in A \cap (B \Delta C) \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C \wedge x \notin B \cap C \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C) \ \wedge \ x \notin B \cap C \Rightarrow x \in$$
$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \wedge x \notin A \cap B \cap C \Rightarrow x \in (A \cap B) \Delta (A \cap C) \Rightarrow A \cap (B \Delta C) \subseteq (A \cap B) \Delta (A \cap C) \quad (i)$$

$$\text{if}\,x \in (A \cap B) \Delta (A \cap C) \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \ \wedge \ x \notin A \cap B \cap C \Rightarrow$$
$$((x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)) \wedge x \notin A \cap B \cap C \Rightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \wedge x \notin A \cap B \cap C \Rightarrow$$
$$x \in A \ \wedge \ x \in B \cup C \ \wedge x \notin B \cap C \Rightarrow x \in A \cap (B \Delta C) \Rightarrow (A \cap B) \Delta (A \cap C) \subseteq A \cap (B \Delta C) \quad (ii)$$

$$(i)\ \&\ (ii) \Rightarrow A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C) \blacksquare$$

ت) این عبارت لزوما درست نیست. برای مثال نقض کافیست قرار دهید

$$A = \{۱, ۲, ۳\},\ B = \{۱, ۳, ۵\},\ C = \{۱, ۲, ۳, ۵, ۶\}$$

پرسش ۵

آ) برای هر دو مجموعه دلخواه A و B نشان دهید رابطه‌ی زیر برقرار است.

$$P^{(A)} \cap P^{(B)} = P^{(A\cap B)}$$

ب) برای هر دو مجموعه دلخواه A و B نشان دهید رابطه‌ی زیر برقرار است.

$$P^{(A)} \cup P^{(B)} \subseteq P^{(A\cup B)}$$

و تحت چه شرایطی تساوی برقرار است؟

راه حل.

آ)

$$\text{if}\, X \in P^{(A\cap B)} \Rightarrow \forall x \in X,\ x \in A\cap B \Rightarrow \forall x \in X,\ x \in A \Rightarrow X \in P^{(A)},\ X \in P^{(B)}$$
$$\Rightarrow X \in P^{(A)} \cap P^{(B)} \Rightarrow P^{(A\cap B)} \subseteq P^{(A)} \cap P^{(B)} \quad (i)$$

$$\text{if}\, X \in P^{(A)} \cap P^{(B)} \Rightarrow X \in P^{(A)},\ X \in P^{(B)} \Rightarrow \forall x \in X,\ x \in A \,\&\, x \in B$$
$$\Rightarrow \forall x \in X,\ x \in A\cap B \Rightarrow X \in P^{(A\cap B)} \Rightarrow P^{(A)} \cap P^{(B)} \subseteq P^{(A\cap B)} \quad (ii)$$

$$(i)\ \&\ (ii) \Rightarrow P^{(A\cap B)} = P^{(A)} \cap P^{(B)} \blacksquare$$

ب)

$$\text{if}\, X \in P^{(A)} \cup P^{(B)} \Rightarrow X \in P^{(A)}\ \vee\ X \in P^{(B)} \Rightarrow X \subseteq A\ \vee\ X \subseteq B \Rightarrow X \subseteq A\cup B$$
$$\Rightarrow X \in P^{(A\cup B)} \Rightarrow P^{(A)} \cup P^{(B)} \subseteq P^{(A\cup B)} \blacksquare$$

برای تساوی ادعا می‌کنیم باید داشته باشیم $A \subseteq B$ یا $B \subseteq A$

$$\text{if}\, P^{(A\cup B)} = P^{(A)} \cup P^{(B)}, \quad A\cup B \in P^{(A\cup B)} \Rightarrow A\cup B \in P^{(A)} \cup P^{(B)}$$
$$\Rightarrow A\cup B \subseteq A\ \vee\ A\cup B \subseteq B \Rightarrow A \subseteq B\ \vee\ B \subseteq A$$

همچنین اگر داشته باشیم $A \subseteq B$ یا $B \subseteq A$ چون در این صورت $A \cup B$ برابر یکی از A یا B می‌شود پس به راحتی می‌توان دید که $P^{(A\cup B)} \subseteq P^{(A)} \cup P^{(B)}$

پس ادعا ثابت شد. $\blacksquare$

پرسش ۶

فرض کنید تابع $f\ :\ X \to Y$ و دو زیرمجموعه‌ی دلخواه A و B از X را داریم.

آ) نشان دهید $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$

ب) همچنین نشان دهید $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$

پ) و نشان دهید اگر f تابعی یک به یک باشد آن‌گاه در قسمت ب تساوی برقرار می‌شود.

راه حل.

آ)

$$\text{if}\, y\in f(A\cup B)\Rightarrow \exists x\in A\cup B; f(x)=y\Rightarrow y\in f(A)\ \vee\ y\in f(B)\Rightarrow y\in f(A)\cup f(B)\Rightarrow$$
$$f(A\cup B)\subseteq f(A)\cup f(B)\quad (i)$$

$$\text{if}\, y\in f(A)\cup f(B)\Rightarrow y\in f(A)\ \vee\ y\in f(B)\Rightarrow \exists x\in A\ \vee\ \exists x\in B; f(x)=y$$
$$\Rightarrow \exists x\in A\cup B; f(x)=y\Rightarrow y\in f(A\cup B)\Rightarrow f(A)\cup f(B)\subseteq f(A\cup B)\quad (ii)$$

$$(i)\ \&\ (ii)\Rightarrow f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)\blacksquare$$

ب)

$$\text{if}\, y\in f(A\cap B)\Rightarrow \exists x\in A\cap B; f(x)=y\Rightarrow y\in f(A)\ \wedge\ y\in f(B)\Rightarrow y\in f(A)\cap f(B)\Rightarrow$$
$$f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)\blacksquare$$

پ)

$$\text{if}\, y\in f(A)\cap f(B)\Rightarrow y\in f(A)\ \wedge\ y\in f(B)\Rightarrow \exists x\in A; f(x)=y\ \wedge\ \exists x'\in B; f(x')=y$$
$$\Rightarrow x=x'\Rightarrow x\in A\cap B\Rightarrow y\in f(A\cap B)\Rightarrow f(A)\cap f(B)\subseteq f(A\cap B)$$

حال بنابر قسمت ب، حکم سوال ثابت شد. ■