



دانشکده علوم ریاضی

مدرس: دکتر شهرام خزایی

ساختمان داده‌ها

تمرین سری چهار

مهلت ارسال: ۲۶ دی

گردآورنده: کورش نژاد، طاهری، مهدی‌خانی، پایدار

• از بین ۸ پرسش زیر، به ۵ پرسش به دلخواه پاسخ دهید.

پرسش ۱

توابع بازگشتی زیر را با روش Akra-Bazzi محاسبه کنید.

(الف)

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + 3T\left(\frac{n}{6}\right) + \Theta(n \log n)$$

(ب)

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{1}{9}T\left(\frac{3n}{4}\right) + \Theta\left(\frac{n^2}{\log n}\right)$$

(پ)

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(\log n)$$

(ت)

$$T(n) = \frac{1}{2}T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta\left(\frac{1}{n}\right)$$

پرسش ۲

به یک درخت دودویی، درخت تریپ می‌گوییم اگر و تنها اگر در هر راس درخت دودویی دو عدد a و b قرار داشته باشد به طوری که مقادیر a روی رئوس تشکیل یک درخت BST و مقادیر b روی رئوس تشکیل یک Max Heap بدهد. (نیازی نیست درخت دودویی کامل باشد؛ یک راس می‌تواند تنها یک فرزند داشته باشد).

(الف) الگوریتمی طراحی کنید که دو آرایه $a_1, a_2, \dots, a_n$ و $b_1, b_2, \dots, b_n$ را به عنوان ورودی بگیرد و در صورت امکان یک درخت تریپ با n راس خروجی بدهد که در هر راس آن a_i و b_i قرار دارد. بررسی کنید اگر تمامی اعداد ورودی متمایز باشند، آنگاه آیا حتماً یک درخت تریپ متناظر وجود دارد؟ در چه شرایطی درخت تریپ یکتا است؟

(ب) آرایه $a_1, a_2, \dots, a_n$ را ثابت در نظر بگیرید. فرض کنید آرایه $b_1, b_2, \dots, b_n$ یک جایگشت کاملاً تصادفی از اعداد ۱ تا n باشد. ثابت کنید در صورت امکان ساخت درخت تریپ، امید ریاضی ارتفاع آن از $O(\log n)$ است.

پرسش ۳

الگوریتمی ارائه دهید که با نهایتاً m مقایسه، ۵ عدد را مرتب (sort) کند. همچنین به طور دقیق نشان دهید که هیچ الگوریتم مبتنی بر مقایسه‌ای وجود ندارد که بتواند ۵ عدد را با نهایتاً $m - 1$ مقایسه مرتب کند. مقدار مناسب m را مشخص کنید و استدلال خود را توضیح دهید.

پرسش ۴

الگوریتمی ارائه دهید که تنها با داشتن پیمایش پیوندی یک درخت جستجوی دودویی، آن درخت را بازسازی کند. درستی الگوریتم و یکتا بودن درخت حاصل را اثبات کنید.

پرسش ۵

آرایه

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

را در نظر بگیرید که همه عناصر آن از هم متمایز هستند. برای این دنباله از اعداد، چند درخت جستجوی دودویی (BST) متفاوت می‌توان رسم کرد؟
نکته: دقت کنید که درخت BST باید دقیقاً دارای n رأس باشد.

پرسش ۶

به یک درخت دودویی جستجو، $\frac{1}{5}$ -متوازن گوییم اگر برای هر رأس v داشته باشیم:

$$\text{size}(\text{left}(v)) \geq \frac{1}{5} \cdot \text{size}(v) \quad \text{و} \quad \text{size}(\text{right}(v)) \geq \frac{1}{5} \cdot \text{size}(v)$$

که در آن $\text{size}(v)$ تعداد رئوس زیردرخت با ریشه v است (شامل خود v).

(الف)

اثبات کنید اندازه زیردرخت هر راسی که در عمق d قرار دارد حداکثر $\frac{4}{5}^d \cdot n$ است.

(ب)

ثابت کنید ارتفاع این درخت $O(\log n)$ است، که n تعداد رئوس درخت است.

(پ)

فرض کنید با درخت تهی شروع کنیم و به ترتیب اعضای آرایه a با طول n را به درخت اضافه کنیم (با عمل درج معمولی در درخت دودویی جستجو). در حین اضافه کردن ممکن است شرط $\frac{1}{5}$ -متوازن بودن برای برخی رئوس v نقض شود.

ثابت کنید اگر پس از هر درج، زیردرخت هر راسی را که این شرط برایش نقض شده باشد، در زمان $\mathcal{O}(\text{size}(\text{subtree}))$ بازسازی کامل کنیم به گونه‌ای که تا حد امکان متوازن شود (و BST بودن حفظ شود)، آنگاه پیچیدگی زمانی سرشکن کل عملیات‌ها $\mathcal{O}(n \log n)$ خواهد بود.

پرسش ۷

فرض کنید اعداد $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ در یک درخت دودویی جستجو به ارتفاع h ذخیره شده‌اند.

(الف)

یک الگوریتم ارائه دهید که بتواند مقدار عدد x_k را به وسیله درخت پیدا کند. این الگوریتم باید در مرتبه زمانی $\mathcal{O}(h+k)$ عمل کند. توجه داشته باشید که ما به ازای هر رأس فقط به فرزند سمت راست و چپ آن (در صورت وجود) دسترسی داریم. هیچ پارامتر دیگری در درخت خود به ازای رئوس مختلف در روند اضافه کردن مقادیر به درخت نداریم.

(ب)

حال اگر در هنگام ساخت درخت به ازای هر گره، تعداد گره‌های زیردرخت مربوط را نیز نگه داریم، آیا می‌توان الگوریتم بهتری بدست آورد؟ توضیح دهید.

پرسش ۸

(الف)

دنباله‌ای از n عدد به شما داده شده است، الگوریتمی با پیچیدگی خطی ارائه دهید که نشان دهد آیا این دنباله می‌تواند نمایش پیمایش **preorder** یک درخت دودویی جستجو باشد؟

(ب)

اگر پیمایش **preorder** و **inorder** یک درخت دودویی داده شده باشد، آیا می‌توان آن درخت را ساخت؟ توضیح دهید.