



مدرس: دکتر شهرام خزایی

ساختمان داده‌ها

تمرین سری سه

مهلت ارسال: ۶ دی

گردآورنده: آرش کورش‌نژاد، مهدی طاهری، محمدحسین مهدی‌خانی

• از بین ۸ پرسش زیر، به ۵ پرسش به دلخواه پاسخ دهید.

پرسش ۱

فرض کنید n طناب به طول‌های $a_1, \dots, a_n$ به شما داده شده است. در هر مرحله می‌توانید دو طناب a_i و a_j را انتخاب کنید، آن دو را با هزینه‌ی $a_i + a_j$ به یکدیگر متصل کنید، و طناب جدید به طول $a_i + a_j$ را به مجموعه طناب‌ها برگردانید. این عملیات را می‌خواهیم تا جایی که تنها یک طناب باقی بماند ادامه دهیم.

الف) نشان دهید کمترین هزینه در صورتی به دست می‌آید که در هر مرحله، دو طناب با کمترین طول را انتخاب و متصل کنیم.

ب) الگوریتمی ارائه دهید که به طور متوسط در زمان $O(n \log n)$ کمترین هزینه را پیدا کند.

پرسش ۲

الف) در هرم بیشینه با n عنصر متمایز، کوچک‌ترین عنصر آن در چه خانه‌هایی قرار دارد؟ هم از دید درخت و هم از دید آرایه توضیح دهید.

ب) در هرم با ارتفاع دقیقاً h کمترین و بیشترین تعداد عضو ممکن را بدست آورید.

پرسش ۳

یک ساختار داده شبیه پشته ارائه دهید که علاوه بر اعمال Push و Pop، کوچک‌ترین عنصر را نیز در زمان $O(1)$ بتواند بدست آورد.

پرسش ۴

الگوریتمی ارائه کنید که در زمان خطی و تنها با استفاده از حافظه ثابت مشخص کند آیا یک لیست پیوندی یک‌سویه دور دارد؟ (گاهی ممکن است یک لیست پیوندی به اشتباه پیاده‌سازی شده باشد و با حرکت از یک عنصر در این لیست، بعد از زمانی به خودِ این عنصر بازگردیم. در این حالت می‌گوییم لیست دور دارد.)

پرسش ۵

فرض کنید k لیست پیوندی مرتب‌شده صعودی با اندازه‌ی n در اختیار دارید. با استفاده از داده‌ساختار هرم الگوریتمی طراحی کنید که در زمان اجرای $O(nk \log k)$ این لیست‌ها را با هم ادغام کند.

Online Median پرسش ۶

فرض کنید یک جریان داده از اعداد صحیح داریم که به صورت یکی‌یکی وارد می‌شوند. می‌خواهیم پس از دریافت هر عدد جدید، میانه تمام اعدادی را که تا آن لحظه دیده‌ایم در زمان $O(\log n)$ محاسبه و گزارش کنیم. ساختاری طراحی کنید که با استفاده از دو Heap عملیات‌های زیر را پشتیبانی کند:

• $\text{insert}(x)$: افزودن عدد جدید به ساختار، در زمان $O(\log n)$

• $\text{getMedian}()$: برگرداندن میانه فعلی در زمان $O(1)$

پرسش ۷

فرض کنید یک الگوریتم بازگشتی به نام $\text{Recursive}(x)$ داریم که دو بار خودش را فراخوانی می‌کند. در حالت کلی می‌توان آن را با فراخوانی الگوریتم‌های Condition ، A_0 ، A_1 ، A_2 ، A_3 و Merge مطابق با الگوریتم زیر پیاده‌سازی کرد. این الگوریتم را با استفاده از یک پشته به یک الگوریتم غیر بازگشتی تبدیل کنید.

Algorithm $\text{RECURSIVE}(x)$

```
1: if  $\text{CONDITION}(x) = \text{TRUE}$  then
2:    $y_0 = A_0(x)$ 
3:   return  $y_0$  // Base case
4: else
5:    $x_1 = A_1(x)$ 
6:    $y_1 = \text{RECURSIVE}(x_1)$ 
7:    $x_2 = A_1(x_1, y_1)$ 
8:    $y_2 = \text{RECURSIVE}(x_2)$ 
9:    $y = \text{MERGE}(x_1, x_2, y_1, y_2)$ 
10:  return  $y$ 
```

در برخی الگوریتم‌ها، ممکن است هزینه‌ی زمانی یک عملیات خاص در بعضی مواقع زیاد باشد؛ اما اگر به دنباله‌ای از عملیات نگاه کنیم، می‌بینیم که این هزینه‌ی زیاد به ندرت اتفاق می‌افتد. در چنین حالتی، به جای بررسی بدترین حالت هر عملیات به تنهایی، مجموع هزینه‌ی انجام چندین عملیات پشت‌سرهم را محاسبه می‌کنیم و سپس هزینه‌ی متوسط هر عملیات را به دست می‌آوریم. برای مثال، اگر مجموع هزینه‌ی انجام n عملیات از مرتبه‌ی $O(n)$ باشد، می‌گوییم هزینه‌ی زمانی هر عملیات به طور متوسط یا سرشکن شده برابر با $O(1)$ است، حتی اگر برخی عملیات به تنهایی هزینه‌ی بیشتری داشته باشند.

پرسش ۸

الف) روشی برای پیاده‌سازی یک صف با استفاده از دو پشته ارائه دهید. سپس هزینه‌ی زمانی عملیات درج و حذف را بررسی کنید. توجه داشته باشید که ممکن است برخی عملیات پرهزینه باشند، اما مجموع هزینه‌ی انجام دنباله‌ای از عملیات را در نظر بگیرید.

ب) برای پیاده‌سازی پشته با استفاده از صف‌ها، حداقل به چند صف نیاز داریم؟ روش پیاده‌سازی را توضیح داده و هزینه‌ی زمانی عملیات‌ها را تحلیل کنید.