



مدرس: دکتر شهرام خزایی

ساختمان داده‌ها

تمرین سری دو

مهلت ارسال: ۱۵ آذر

گردآورنده: کورش نژاد، طاهری، مهدی خانی، پایدار

- از بین ۸ پرسش زیر، به ۵ پرسش به دلخواه پاسخ دهید.

پرسش ۱

دانش‌آموزان یک کلاس n نفره را می‌خواهیم با توجه به قدشان به دو گروه تقسیم کنیم به طوری که اعضای گروه اول از تمامی اعضای گروه دوم کوتاه‌تر باشند. می‌خواهیم گروه اول تا جای ممکن کوچک باشد ولی از طرفی می‌خواهیم مجموع قد افراد گروه اول حداقل برابر نصف مجموع قد تمامی افراد باشد.

دو قسمت اول را با فرض متمایز بودن قد دانش‌آموزان پاسخ دهید.

- الف) الگوریتمی با زمان اجرای $O(n \log n)$ ارائه دهید.
- ب) با فرض داشتن یک الگوریتم قطعی با زمان اجرای خطی برای پیدا کردن میانه، مسئله را در زمان خطی حل کنید.
- پ) یک الگوریتم تصادفی با زمان اجرای متوسط خطی برای مسئله ارائه کنید.
- ت) بدون فرض متمایز بودن اعضا، الگوریتم مربوطه را ارائه دهید.

پرسش ۲

می‌خواهیم از بین n عدد، k امین کوچکترین عنصر، $2k$ امین کوچکترین عنصر و به همین ترتیب تا آخرین ضریب k امین کوچکترین عنصر را پیدا کنیم. روشی از $O(n \log \frac{n}{k})$ برای این کار ارائه دهید.

پرسش ۳

الگوریتمی با مرتبه زمانی $O(n \log n)$ طراحی کنید که با ورودی گرفتن یک آرایه a با n عضو، دو عدد $1 \leq l \leq r \leq n$ را طوری پیدا کند که

$$\max_{l \leq i \leq r} a_i + \min_{l \leq i \leq r} a_i + r - l$$

بیشینه باشد.

پرسش ۴

فرض کنید سه ماتریس A و B و C در $M_{n \times n}(\mathbb{Z}_p)$ به شما داده شده‌اند. (هر یک $n \times n$ هستند و درایه‌های آن‌ها عضو میدان $\mathbb{Z}_p$ هستند که p عددی اول است.) می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا $AB = C$ یا خیر.

(الف)

ماتریس $D \in M_{n \times n}(\mathbb{Z}_p)$ برای p اول را در نظر بگیرید. فرض کنید r یک بردار به طول n است که هر یک از درایه‌های آن به صورت مستقل و کاملاً تصادفی از $\{0, 1\}$ انتخاب شده‌اند. نشان دهید احتمال آنکه $Dr = 0$ حداکثر $\frac{1}{p}$ است.

(ب)

یک الگوریتم تصادفی ارائه کنید که اگر $AB = C$ آنگاه همواره جواب درستی بدهد و هنگامی که $AB \neq C$ به احتمال حداکثر $\frac{1}{p}$ اشتباه کند (بگوید برابر هستند). الگوریتم شما باید در زمان $O(n^2)$ اجرا شود.

(ج)

از الگوریتم خود در بخش ج به عنوان یک subroutine استفاده کنید و الگوریتمی ارائه دهید که در زمان چندجمله‌ای اجرا شود و احتمال پاسخ اشتباه آن در حالتی که $AB \neq C$ حداکثر $\frac{1}{n}$ باشد.

پرسش ۵

در این سوال صحت یک الگوریتم را با ناوردایی حلقه اثبات می‌کنیم. در مسئله‌ی زیرآرایه‌ی بیشینه، یک آرایه به طول n داده شده و هدف پیدا کردن یک زیرآرایه‌ی متوالی است که مجموعه اعداد درون آن بیشینه باشد. (آرایه‌ی تهی نیز یک جواب قابل قبول است) برای مثال در آرایه‌ی $[10, -13, 7, 3, 2]$ ، جواب عدد ۱۲ است که متناظر زیرآرایه‌ی متشکل از سه عنصر اول است. در اینجا یک الگوریتم ساده برای حل این مساله آورده شده است. با تعریف یک ناوردایی حلقه، درستی این الگوریتم را اثبات کنید.

```

1: function MAX-SUBARRAY( $A, n$ )
2:    $Best = -\infty$ 
3:    $Sum = 0$ 
4:   for  $i = 1$  to  $n$  do
5:      $Sum = MAX(Sum + A[i], A[i])$ 
6:      $Best = MAX(Best, Sum)$ 
7:   return  $Best$ 

```

پرسش ۶

فرض کنید تابع $\text{flip}()$ عدد ۰ یا ۱ را با احتمال برابر می‌دهد. نشان دهید الگوریتم Random عدد صحیح n را می‌گیرد و یک عدد صحیح به صورت تصادفی یکنواخت از مجموعه $\{0, \dots, n-1\}$ خروجی می‌دهد و با احتمال ۱ خاتمه می‌یابد. این الگوریتم به طور متوسط چند بیت تصادفی استفاده می‌کند؟

```

1: function RANDOM( $n$ )
2:    $v \leftarrow 1$  ;  $c \leftarrow 0$ 
3:   while True do
4:      $v \leftarrow 2v$ 
5:      $c \leftarrow 2c + \text{flip}()$ 
6:     if  $v \geq n$  then
7:       if  $c < n$  then
8:         return  $c$ 
9:       else
10:         $v \leftarrow v - n$ 
11:        $c \leftarrow c - n$ 

```

راهنمایی: بعد از اجرای خط پنجم، c توزیع یکنواخت روی مجموعه $\{0, \dots, v-1\}$ دارد.

پرسش ۷

تعریف: چرخه در جایگشت

فرض کنید P یک آرایه شامل جایگشتی از اعداد ۱ تا n باشد (یعنی هر عدد دقیقاً یک بار در آرایه ظاهر شده است). اندیس‌های آرایه را نیز از ۱ تا n در نظر می‌گیریم. یک چرخه زمانی تشکیل می‌شود که از یک اندیس دلخواه شروع کنیم و مقدار آن خانه را به عنوان «اندیس بعدی» در نظر بگیریم و این کار را تکرار کنیم تا زمانی که به اندیس شروع بازگردیم. به بیان دقیق‌تر، دنباله‌ای از اندیس‌های $i_1, i_2, \dots, i_k$ یک چرخه به طول k تشکیل می‌دهند اگر:

$$P[i_1] = i_2, \quad P[i_2] = i_3, \quad \dots, \quad P[i_k] = i_1$$

مثال: فرض کنید $n = 7$ و آرایه جایگشت P به صورت زیر باشد:

۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	اندیس (i)
۲	۶	۴	۷	۱	۵	۳	مقدار ($P[i]$)

برای پیدا کردن چرخه‌ها:

- از اندیس ۱ شروع می‌کنیم: مقدار آن ۳ است $\leftarrow$ به سراغ اندیس ۳ می‌رویم: مقدار آن ۱ است $\leftarrow$ به اندیس ۱ برگشتیم.
- چرخه اول: (۱, ۳)

- از اولین اندیس دیده نشده (۲) شروع می‌کنیم: مقدار آن ۵ است ← اندیس ۵ (مقدار ۴) ← اندیس ۴ (مقدار ۷) ← اندیس ۷ (مقدار ۲) ← به اندیس ۲ برگشتیم.
چرخه دوم: (۲, ۵, ۴, ۷)

- از اندیس دیده نشده بعدی (۶) شروع می‌کنیم: مقدار آن ۶ است ← بلافاصله برگشتیم.
چرخه سوم: (۶)

بنابراین این جایگشت دارای ۳ چرخه است.

مسئله: امید ریاضی تعداد چرخه‌ها

فرض کنید C_n متغیر تصادفی بیانگر تعداد چرخه‌ها در یک جایگشت کاملاً تصادفی با طول n باشد. با استفاده از متغیرهای تصادفی شاخص و خاصیت خطی بودن امید ریاضی، ثابت کنید که امید ریاضی تعداد چرخه‌ها برابر است با:

$$\mathbb{E}[C_n] = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

راهنمایی: فرض کنید A_k رویدادی باشد که «عنصر k کوچک‌ترین عنصر در چرخه خود باشد». متغیر تصادفی نشانگر (شاخص) مربوط به این رویداد را در نظر بگیرید و تعداد چرخه‌ها را بر حسب این متغیرهای نشانگر بیان کنید. برای محاسبه احتمال A_k ، آن را روی طول چرخه‌ای که k را شامل می‌شود شرطی کنید و از قانون احتمال کل استفاده کنید.

پرسش ۸

امید ریاضی تعداد فراخوانی‌های تابع RANDOMIZED-PARTITION را در الگوریتم RANDOMIZED-QUICKSORT (الگوریتم کتاب) محاسبه کنید.