



سوال ۱

فرض کنید $a \in \mathbb{R}$ و ماتریس A یک ماتریس $n \times n$ باشد به طوری که

$$a_{ij} = a^{|i-j|}$$

دترمینان ماتریس A را محاسبه کنید.

سوال ۲

گزاره زیر را ثابت کنید یا برای آن یک مثال نقض بزنید:

یک ماتریس $n \times n$ با درایه‌های حقیقی مانند A وجود دارد به طوری که

$$A^2 + 2A + 5I = 0$$

سوال ۳

فرض کنید $T \in L(F^3)$ مانند زیر تعریف شده باشد:

$$T(z_1, z_2, z_3) = (z_3, 2z_1, 3z_2)$$

یک $S \in L(F^3)$ بیابید (به طور صریح) که S یکانی باشد و $T = S\sqrt{T^*T}$.

سوال ۴

فرض کنید T یک عملگر روی \mathbb{R}^3 (مجهز به ضرب داخلی اقلیدسی) باشد و ماتریس آن در پایه‌ی استاندارد به شکل زیر باشد:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(الف) تجزیه قطبی T را بیابید. (راهنمایی: ماتریس T^*T قطری است.)

(ب) تجزیه مقدار تکین T را بیابید. می‌توانید جواب خود را به صورت یک تجزیه ماتریسی یا به صورت یک سری پایه (f_i) ، (e_i) و تعدادی

اسکالر (s_i) ارائه دهید به طوری که $T(v) = \sum_i s_i \langle v, e_i \rangle f_i$.

سوال ۵

فرض کنید $P \in L(V)$ یک ماتریس باشد به طوری که $P^2 = P$. ثابت کنید $\text{trace}(P) = \dim \text{range}(P)$.

سوال ۶

فرض کنید V یک فضای برداری همراه با یک ضرب داخلی باشد و $P, Q \in L(V)$ تصویرهایی عمودی باشند. ثابت کنید $\text{tr}(PQ) \geq 0$.