



مدرس: دکتر علیرضا رنجبر

جبر خطی

تمرین سری نهم

پرسش ۱ - (صفحه 199 ، شماره 1)

$a \in K$ را در نظر بگیرید که $a \neq 0$. نشان دهید که بردارهای ویژه ماتریس

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

فضایی 1 بعدی تولید می‌کنند و پایه‌ای برای این فضا ارائه دهید.

پرسش ۲ - (صفحه 199 ، شماره 4)

فرض کنید $A = (a_{ij})$ ماتریسی $n \times n$ باشد که برای هر $i = 1, 2, \dots, n$ داشته باشیم:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = 0.$$

نشان دهید 0 یک مقدار ویژه A می‌باشد.

پرسش ۳ - (صفحه 199 ، شماره 5)

(آ) نشان دهید اگر $\theta \in R$ آنگاه ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

همیشه یک بردار ویژه در R^2 دارد، در حقیقت همیشه برداری مانند v_1 یافت می‌شود که $Av_1 = v_1$.
(ب) فرض کنید v_2 برداری عمود بر بردار v_1 که در قسمت قبل معرفی کردیم باشد. نشان دهید $Av_2 = -v_2$.

پرسش ۴ - (صفحه 200 ، شماره 7)

V را یک فضای برداری متناهی بعدی در نظر بگیرید. همچنین A و B را دو نگاشت خطی از V به خودش تعریف کنید و همچنین داشته باشیم $AB = BA$. نشان دهید اگر v یک بردار ویژه A مربوط به مقدار ویژه λ باشد، آنگاه Bv نیز یک بردار ویژه از A مربوط به مقدار ویژه λ می‌باشد، در صورتی که $Bv \neq 0$.

پرسش ۵ - (صفحه 213 ، شماره 7)

مقادیر ویژه و پایه‌ای برای فضای ویژه ماتریس های زیر پیدا کنید.
(آ)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(ب)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{pmatrix}$$

پرسش ۶ - (صفحه 213 ، شماره 9)

فرض کنید V یک فضای برداری n بعدی باشد و همچنین چند جمله‌ای مشخصه یک نگاشت خطی $A : V \rightarrow V$ ریشه متمایز داشته باشد. نشان دهید V پایه‌ای متشکل از بردارهای ویژه A دارد.

پرسش ۷ - (صفحه 213 ، شماره 14)

فرض کنید $A : V \rightarrow V$ یک نگاشت خطی از V به خودش باشد و $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ را پایه‌ای برای V متشکل از بردارهای ویژه ای با مقادیر ویژه متمایز c_1, c_2, \dots, c_n در نظر بگیرید. نشان دهید هر بردار ویژه v از A ، در V ، ضربی اسکالر از یک v_i می‌باشد.

پرسش ۸ - (صفحه 213 ، شماره 15)

A و B را ماتریس هایی مربعی با اندازه یکسان در نظر بگیرید. نشان دهید مقادیر ویژه AB و BA یکسان می‌باشند.