دانشکده‌ی علوم ریاضی

جبرخطی مدرس: دکتر علیرضا رنجبر

تمرین سری هشتم

پرسش ۱ ــ (صفحه 168 ، شماره $1(e)$)

علامت جایگشت زیر را حساب کنید.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

پرسش ۲ ــ (صفحه 168 ، شماره $1(h)$)

علامت جایگشت زیر را حساب کنید.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

پرسش ۳ ــ (صفحه 168 ، شماره 2)

وارون دو جایگشت درون قسمت های الف و ب را بدست آورید.

پرسش ۴ ــ (صفحه 173 ، شماره 2)

به اثبات لم 7.1 مراجعه کنید و تایید کنید که در آن از همه خواص دترمینان ها استفاده نشده است و تنها از دوتای اول آنها استفاده شده است. بدین ترتیب فرض کنید F یک تابع چندخطی و متناوب [1] دلخواه باشد. مانند لم 7.1 قرار دهید

$$A^j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} X^i \quad for\ j = 1, 2, \ldots, n$$

در نتیجه داریم

$$F(A^1, \ldots, A^n) = \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) b_{\sigma(1),1} \ldots b_{\sigma(n),n} F(X^1, \ldots, X^n).$$

چرا می‌توان نتیجه گرفت که اگر B ماتریس (b_{ij}) باشد، آنگاه

$$F(A^1, \ldots, A^n) = \det(B) F(X^1, \ldots, X^n)?$$

[1] Alternating

پرسش ۵ ـ (صفحه 174 ، شماره 3)

$F: R^n \times R^n \times \cdots \times R^n \to R^n$ را تابعی از n متغیر در نظر بگیرید که هر کدام درون R^n هستند. فرض کنید F در هر متغیر خطی است و اگر $A^1, A^2, \ldots, A^n \in R^n$ و دوتایی r و s وجود داشته باشند که $1 \leq r, s \leq n$ و $r \neq s$ و $A^r = A^s$ ، آنگاه $F(A^1, \ldots, A^n) = 0$. فرض کنید $B^i (i = 1, \ldots, n)$ بردار ها و c_{ij} اعداد باشند به طوری که

$$A^j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} B^i.$$

آ) اگر $F(B^1, \ldots, B^n) = -3$ و $\det(c_{ij}) = 5$ ، $F(A^1, \ldots, A^n)$ چند می‌باشد؟

ب) اگر $F(E^1, \ldots, E^n) = 2$ (که E^i ها بردار های یکانی استاندارد هستند)، و اگر $F(A^1, \ldots, A^n) = 10$ ، $\det(A^1, \ldots, A^n)$ را بدست آورید.

پرسش ۶ ـ (صفحه 177 ، شماره 4)

اگر A یک ماتریس $n \times n$ با دترمینان ناصفر و B یک بردار در فضای n بعدی باشد، نشان دهید دستگاه معادلات خطی $AX = B$ جوابی یکتا دارد. اگر $B = O$ باشد این جواب برابر $X = O$ است.