**دانشکده‌ی علوم ریاضی**

**جبرخطی** مدرس: دکتر علیرضا رنجبر

# تمرین سری هفتم

## پرسش ۱ ــ ( صفحه 155 ، شماره $5(a)$ )

نشان دهید تساوی زیر برقرار است:

$$det(\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix}) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

## پرسش ۲ ــ ( صفحه 155 ، شماره $6(i)$ )

فرض کنید $A$ یک ماتریس $n \times n$ باشد به طوری که تمام درایه های زیر قطر اصلی اش برابر $0$ هستند. دترمینان $A$ را محاسبه کنید.

## پرسش ۳ ــ ( صفحه 156 ، شماره 9 )

فرض کنید $f(t)$ و $g(t)$ توابعی باشند که مشتق آنها از هر مرتبه ای موجود باشد. تابع $\phi(t)$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$\phi(t) = det(\begin{pmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{pmatrix})$$

نشان دهید داریم:

$$\phi(t) = det(\begin{pmatrix} f(t) & g(t) \\ f''(t) & g''(t) \end{pmatrix})$$

## پرسش ۴ ــ ( صفحه 156 ، شماره 10 )

$$A(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) & c_1(t) \\ b_2(t) & c_2(t) \end{pmatrix}$$

را به عنوان ماتریسی $2 \times 2$ از توابع مشتق پذیر در نظر بگیرید. همچنین $B_t$ و $C_t$ را به عنوان بردار های ستونی مربوط، در نظر بگیرید. قرار دهید

$$\phi(t) = \det(A(t))$$

و نشان دهید که

$$\phi'(t) = \det(B'(t), C(t)) + \det(B(t), C'(t))$$

برقرار می‌باشد.

## پرسش ۵ ــ ( صفحه 156 ، شماره 11 )

فرض کنید $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ اعداد متمایز ناصفر باشند. نشان دهید توابع

$$e^{\alpha_1 t}, \ldots, e^{\alpha_n t}$$

روی میدان اعداد مختلط، مستقل خطی می‌باشند.

## پرسش ۶ ــ ( صفحه 162 ، شماره 1 )

**آ)** فرض کنید $1 \geq r$ و $n \leq s$ و $s \neq r$. $J_{rs}$ را ماتریسی $n \times n$ در نظر بگیرید که درایه $rs$ آن برابر 1 و باقی درایه هایش برابر 0 هستند. تعریف کنید $E_{rs} = I + J_{rs}$ و نشان دهید داریم

$$\det(E_{rs}) = 1.$$

**ب)** فرض کنید $A$ ماتریسی $n \times n$ باشد. دو ماتریس $E_{rs}A$ و $AE_{rs}$ را توصیف کنید.

## پرسش ۷ ــ ( صفحه 163 ، شماره 2 )

در اثبات قضیه 5.3 از این حقیقت استفاده شد که اگر $A$ ماتریسی مثلثی باشد، آنگاه ستون هایش مستقل خطی اند اگر و تنها اگر همه درایه های قطری ناصفر باشند. جزئیات این اثبات را کامل کنید.