دانشکده‌ی علوم ریاضی

جبرخطی مدرس: دکتر علیرضا رنجبر

تمرین سری شش

پرسش ۱ ــ (صفحه 103 ، شماره 3)

به سوال شماره 1 تمرین سری 2 مراجعه کنید.

پرسش ۲ ــ (صفحه 111 ، شماره $2(a)$)

ابتدا توجه کنید که دو بردار داده شده مستقل خطی هستند. در نتیجه با استفاده از روش گرام‌ــ‌اشمیت، پایه یکه متعامدی از آنها را به صورت زیر می‌سازیم(در اینجا ضرب داخلی را ضرب داخلی استاندار روی $\mathbb{R}^n$ در نظر گرفتیم):

$$v_1 = \frac{(1,2,1,0)}{||(1,2,1,0)||} = \frac{(1,2,1,0)}{\sqrt{6}}$$

$$v_2 = \frac{(1,2,3,1) - \frac{<(1,2,3,1), \frac{(1,2,1,0)}{\sqrt{6}}>}{1}(1,2,1,0)}{||(1,2,3,1) - \frac{<\frac{(1,2,1,0)}{\sqrt{6}}, \frac{(1,2,1,0)}{\sqrt{6}}>}{1}(1,2,1,0)||}$$

پرسش ۳ ــ (صفحه 112 ، شماره 4)

از روی توابع f و g به ترتیب توابع f' و g' را با استفاده از روش گرام اشمیت می‌سازیم که تشکیل پایه‌ای یکه متعامد برای این فضا دهند(مجددا می‌توان دید که در اینجا f و g مستقل خطی هستند):

$$f'(t) = \frac{f(t)}{||f(t)||} = \frac{t}{||t||}$$

$$g'(t) = \frac{g(t) - \frac{<g(t),f'(t)}{<f'(t),f'(t)>}}{||g(t) - \frac{<g(t),f'(t)}{<f'(t),f'(t)>}||}$$

پرسش ۴ ــ (صفحه 112 ، شماره 7)

آ) ابتدا برای مشاهده دلایل ضرب داخلی بودن این تعریف به سوال شماره 3 تمرین 3 مراجعه کنید. حال برای این که نشان دهیم این ضرب داخلی ناتباهیده است، باید بگوییم که اگر داشته باشیم $<A,B>=tr(AB)=0$ که

A ماتریسی مشخص و B ماتریسی دلخواه از بین همه ماتریس های $n \times n$ روی $\mathbb{R}$ است، آنگاه $A = 0$ می‌باشد. حال فرض کنید A ماتریس صفر نباشد؛ این یعنی درایه‌ای از A مانند درایه در سطر iم و ستون jمش وجود دارد به طوری که $A_{i,j} \neq 0$ باشد. حال ماتریس E را بدین صورت می‌سازیم که تمام درایه های این ماتریس برابر 0 هستند، به جز درایه واقع در سطر jم و ستون iم آن که برابر 1 می‌باشد. حال باتوجه به تعریف ضرب ماتریسی، می‌توان به سادگی بررسی کرد که حاصل ضرب دو ماتریس A و E ، ماتریسی است که درایه واقع در سطر iم و ستون iم آن برابر با $A_{i,j}$ بوده و بقیه درایه های روی قطر آن برابر صفر می‌باشند(چرا؟). در نتیجه $tr(AE) > 0$ است که این برخلاف فرضی است که انجام دادیم. در نتیجه به ازای هر ماتریس ناصفری، در ضرب داخلی تعریف شده می‌توان ماتریس دیگری یافت که تریس حاصل ضرب این دو ماتریس ناصفر باشد. در نتیجه این شرایط تنها برای ماتریس تمام صفر برقرار بوده و بنابراین ضرب داخلی مورد نظر ناتباهیده می‌باشد.

ب) داریم:

$$tr(AA) = \sum_{i=1}^{n} AA_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}A_{j,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}^2$$

که در تساوی آخر از فرض متقارن بودن ماتریس A استفاده شده است. همچنین طرف راست تساوی‌ای که در بالا بدست آوردیم همواره نامنفی بوده و تنها هنگامی برابر صفر می‌شود که A ماتریس تمام صفر باشد. در نتیجه در شرایط مورد نظرمان صدق می‌کند.

پ) برای دو حکم اول به سوال شماره 2 تمرین 3 مراجعه کنید. حال دقت کنید که با این نوع از تعریف W ، $W^{\perp}$ برابر فضای تمام ماتریس های متقارنی می‌باشد که تریس حاصل ضرب آنها با اعضای W برابر صفر شود(دقت کنید که می‌دانیم اجتماع اعضای W و $W^{\perp}$ شامل کل فضا می‌شود و از اینجا می‌توان ساختار $W^{\perp}$ را حدس زد). همچنین چون می‌دانیم که بعد فضای تمام ماتریس های متقارن برابر با $\frac{(n+1)n}{2}$ و بعد زیرفضای W از آن نیز برابر با $\frac{(n+1)n}{2} - 1$ می‌باشد، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که بعد $W^{\perp}$ باید برابر با 1 باشد.(به عنوان تمرین سعی کنید $W^{\perp}$ و بعد آن را بدون استفاده از قضیه بعد هرفضا و مکمل متعامد آن بدست آورید)

پرسش ۵ ــ (صفحه 112 ، شماره 9)

ابتدا توجه کنید که داریم:

$$< v, \sum_{i=1}^{m} < v, v_i > v_i > = < \sum_{i=1}^{m} < v, v_i > v_i, v > = \sum_{i=1}^{m} < v, v_i >< v_i, v > = \sum_{i=1}^{m} < v, v_i >^2$$

حال چون طبق فرض سوال می‌دانیم:

$$< v, v > = ||v||^2 = \sum_{i=1}^{m} < v, v_i^2 = < v, \sum_{i=1}^{m} < v, v_i > v_i >$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\sum_{i}^{m} < v, v_i > v_i = v$$

که این یعنی هر بردار دلخواه v را می‌توان به صورت ترکیب خطی‌ای از v_i ها نمایش داد.
همچنین چون طبق فرض سوال v_i ها دو به دو به یکدیگر عمود می‌باشند، هر ترکیب خطی نابدیهی‌ای از آنها نیز

ناصفر است(کافی است نرم به توان دو یک ترکیب خطی نابدیهی دلخواه را در نظر بگیرید و به صورت ضرب داخلی بنویسیدش و سپس از عمود بودن بردار ها به یکدیگر استفاده کنید). در نتیجه v_i ها بردار هایی مستقل خطی بوده که ترکیب های خطی مختلف آنها کل فضای V را نیز شامل می‌شود و بنابراین $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ پایه‌ای برای V می‌باشند.

پرسش ۶ ـ (صفحه 112 ، شماره 10)

داریم:

$$||u+v||^2 + ||u-v||^2 =$$
$$< u+v, u+v > + < u-v, u-v > = < u, u+v > + < v, u+v > + < u-v, u-v > =$$
$$< u, u+v > + < v, u+v > + < u, u-v > - < v, u-v > =$$
$$< u+v, u > + < u+v, v > + < u-v, u > - < u-v, v > =$$
$$< u, u > + < v, u > + < u, v > + < v, v > + < u, u > - < v, u > - < u, v > + < v, v > =$$
$$2(||u||^2 + ||v||^2)$$

پرسش ۷ ـ (صفحه 117 ، شماره $1(h)$)

می‌دانیم که رتبه سطری و ستونی یک ماتریس با هم برابر می‌باشند. در نتیجه چون این ماتریس 3 ستون دارند، رتبه ماتریس حداکثر برابر 3 می‌باشد. حال یک ترکیب خطی دلخواه از 3 ستون ماتریس را در نظر بگیرید که ستون اول ضریب a ، ستون دوم ضریب b و ستون سوم ضریب c دارد. باتوجه به سطر اول این ماتریس، در صورتی که بخواهیم این ترکیب خطی برابر با 0 شود، باید داشته باشیم $a+b=c$. اما اگر این شرط برقرار باشد، به سادگی می‌توان دید که مولفه آخر این ترکیب خطی(که معادل سطر آخر ماتریس می‌شود) ناصفر خواهد بود. در نتیجه هر ترکیب خطی نابدیهی از این 3 ستون، برابر برداری ناصفر می‌شود و همچنین چون هیچ دو ستونی نیز ضریبی از یکدیگر نیستند، بنابراین رتبه این ماتریس برابر 3 می‌باشد.

پرسش ۸ ـ (صفحه 117 ، شماره 2)

طبق قضیه اساسی جبرخطی می‌دانیم بعد فضای خطی متناظر یک ماتریس، برابر با جمع رتبه پوچی و تصویر آن می‌باشد. حال دقت کنید که اگر بردار v در پوچی ماتریس B قرار بگیرد، به سادگی می‌توان دید که v در پوچی AB نیز قرار می‌گیرد(چرا؟). در نتیجه رتبه پوچی AB بزرگترمساوی رتبه پوچی B بوده و چون هر دو AB و B در فضاهایی با بعد یکسان قرار می‌گیرند، می‌توان نتیجه گرفت که رتبه تصویر AB که مساوی $rank(AB)$ است، کمتر مساوی رتبه تصویر B که مساوی $rank(B)$ است می‌باشد.
همچنین توجه کنید که $rank(AB)$ ، برابر بعد فضای تمام بردار هایی مانند v می‌باشد که به ازای آنها $ABv \neq 0$ است. از این نیز نتیجه می‌شود که هم باید Bv برداری ناصفر باشد، و هم اگر داشته باشیم $Bv = u$ ، آنگاه Au نیز باید برداری ناصفر باشد. در نتیجه به ازای هر بردار ناصفر مانند u ، که $Au \neq 0$ و $u = Bv$ که v نیز برداری ناصفر است، دو بردار u درون فضای تصویر A و v درون فضای تصویر AB را داریم. حال دو بردار مستقل خطی مانند x و y را درون فضای تصویر AB در نظر بگیرید، چون می‌دانیم که $ABx \neq ABy$ (چرا؟) هر دو Bx و

By بردارهای مستقل خطی‌ای(چرا؟) هستند که درون فضای تصویر A قرار می‌گیرند، در نتیجه می‌توانیم به ازای پایه‌ای از فضای تصویر AB ، مجموعه‌ای مستقل خطی در فضای تصویر A پیدا کنیم. بنابراین اثبات می‌شود که بعد فضای تصویر A بیشتر مساوی فضای تصویر AB می‌باشد.

پرسش ۹ ــ (صفحه 118 ، شماره 3)

می‌دانیم رتبه سطری یک ماتریس برابر با رتبه ستونی‌اش می‌باشد. همچنین دقت کنید هر ترکیب خطی دلخواهی از سطر های ماتریس A را اگر در نظر بگیرید، در صورتی که کوچکترین اندیس سطری که ضریب ناصفر دارد، برابر i باشد، آنگاه به سادگی می‌توان دید که درایه iم بردار حاصل ناصفر می‌باشد.در نتیجه هیچ ترکیب خطی نابدیهی‌ای از سطرهای A برابر صفر نمی‌باشد که نتیجه می‌دهد رتبه ماتریس A برابر n است.