دانشکده‌ی علوم ریاضی

جبرخطی مدرس: دکتر علیرضا رنجبر

تمرین سری پنج

پرسش ۱ ـ (صفحه 87 ، شماره $1(a)$)

ابتدا دقت کنید که این ماتریس باید ماتریسی 4×2 باشد، زیرا تنها چنین ماتریسی است که برداری 4 بعدی را به برداری 2 بعدی تبدیل می‌کند. همچنین باتوجه به تعریف ضرب ماتریسی و همچنین چون می‌خواهیم به ازای هر برداری تنها دو درایه اولش حفظ شوند، به راحتی می‌توان مشاهده کرد که ماتریس مورد نظر به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

پرسش ۲ ـ (صفحه 87 ، شماره 10)

می‌دانیم ماتریس دورانی متناظر F_θ به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

حال برای این که F_θ وارون پذیر باشد باید نشان دهیم که پوچی آن برابر $\{O\}$ می‌باشد. برای این امر نیز نشان می‌دهیم که اثر این نگاشت روی E_1 و E_2 که پایه‌ای برای فضای نقاط صفحه می‌باشد، ناصفر بوده و بنابراین برروی هر بردار ناصفری درون فضا نیز ناصفر می‌باشد. بنابراین فرض کنید داشته باشیم:

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} E_1 = 0$$

از این فرض نتیجه می‌شود:

$$\cos(\theta) = 0, \sin(\theta) = 0$$

که می‌دانیم به ازای هیچ θ ای این معادله برقرار نمی‌باشد. همچنین به طور مشابه داریم:

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} E_2 = 0$$

نتیجه می‌دهد که

$$-\sin(\theta) = 0, \cos(\theta) = 0$$

و مجددا می‌دانیم این معادله نیز برای هیچ θای جواب نداشته و در نتیجه نشان دادیم که F_θ وارون پذیر می‌باشد.
حال دقت کنید که اگر این ماتریس را در ماتریس

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

ضرب کنیم، به سادگی می‌توان دید که حاصل برابر ماتریس همانی می‌باشد. حال باتوجه به این که ماتریس وارون یکتا است، در نتیجه ماتریس متناظر نگاشت F_θ^{-1} برابر این ماتریس می‌باشد.

پرسش ۳ ــ (صفحه 93 ، شماره $1(a)$)

اگر M ماتریسی 3×3 و به صورت زیر باشد:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

آنگاه می‌خواهیم که داشته باشیم:

$$M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, M\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, M\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

حال باتوجه به تعریف ماتریس، تعدادی معادله به صورت زیر بدست خواهیم آورد:

$$a_{1,1} + a_{1,2} = 2, -a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3} = 0, a_{1,2} + 2a_{1,3} = -1$$

$$a_{2,1} + a_{2,2} = 1, -a_{2,1} + a_{2,2} + a_{2,3} = 0, a_{2,2} + 2a_{2,3} = 1$$

$$a_{3,1} + a_{3,2} = 1, -a_{3,1} + a_{3,2} + a_{3,3} = 1, a_{3,2} + 2a_{3,3} = 1$$

که با حل این دستگاه معادلات، ماتریس M به صورت زیر خواهد بود:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{-4}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

پرسش ۴ ــ (صفحه 93 ، شماره 2)

اگر ماتریس V را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$V = \begin{pmatrix} v_1 & | & v_2 & | & \dots & | & v_n \end{pmatrix}$$

آنگاه باید داشته باشیم:

$$MV = \begin{pmatrix} c_1v_1 & | & c_2v_2 & | & \dots & | & c_nv_n \end{pmatrix}$$

(چرا؟) حال برای به دست آوردن M تنها کافی است که V^{-1} را در دو طرف این تساوی ضرب کنیم. همچنین دقت کنید که اگر V وارون پذیر نباشد، آنگاه c_i ها نمی‌توانند مقادیر دلخواه داشته باشند. همچنین در این حالت نیز کافی است که V را به یک ماتریس وارون پذیر با حذف تعدادی از ستونهایش تبدیل کنیم، و سپس از روی ماتریس بدست آمده متناظر، ماتریس M را بسازیم(مجددا دقت کنید که در صورت وارون پذیر نبودن V هر مقدار دهی‌ای برای c_i ها معتبر نیست و ممکن است چنین چیزی اصلا امکان پذیر نباشد!).

پرسش ۵ ــ (صفحه 93 ، شماره 5)

باتوجه به سوال دو می‌دانیم ماتریس متناظر F به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 3\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{2}}{2}E^1 + 3\frac{\sqrt{2}}{2}E^2$$

پرسش ۶ ــ (صفحه 93 ، شماره $8(e)$)

داریم:

$$(1)' = 0, (t)' = 1, (e^t)' = e^t, (e^{2t})' = 2e^{2t}, (te^{2t})' = e^{2t} + 2te^{2t} = (2t+1)e^{2t}$$

در نتیجه فضای تولیدی توسط مشتق این پایه، زیرفضایی از فضای تولید شده توسط خود پایه می‌باشد. در نتیجه ماتریس مورد نظر را می‌توانیم معادل نگاشت خطی‌ای در نظر بگیریم که این بردار ها را به همین پایه می‌برد. در نتیجه باتوجه به نتایج بالا، ماتریس D به صورت زیر می‌باشد:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2t+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

پرسش ۷ ــ (صفحه 93 ، شماره 9)

به سوال 7 تمرین سری دوم مراجعه شود.

پرسش ۸ ـ (صفحه 93 ، شماره 10)

برای این که نشان دهیم یک نگاشت خطی وارون پذیر می‌باشد، کافی است نشان دهیم که پوچی آن برابر $\{O\}$ است.
حال فرض کنید داشته باشیم:

$$Iv - D^2v = 0$$

باشد که v یک بردار درون فضا متناظر با یک جندجمله‌ای می‌باشد. فرض بالا معادل است با:

$$v = D^2v$$

و این یعنی یک چندجمله‌ای باید با مشتق دوم خودش برابر باشد؛ اما می‌دانیم چنین چیزی ممکن نیست زیرا درجه مشتق دوم هر چندجمله‌ای، دو تا از درجه خود چندجمله‌ای کمتر می‌باشد و بدین ترتیب تنها چندجمله‌ای که این امر برایش امکان پذیر است، چندجمله‌ای ثابت صفر می‌باشد. در نتیجه این نگاشت وارون پذیر است.
به طور مشابه اگر یک v درون پوچی نگاشت $D^m - I$ قرار بگیرد، آنگاه v تنها می‌تواند چندجمله‌ای ثابت صفر باشد و در نتیجه این نگاشت نیز وارون پذیر می‌باشد.
با استدلالی مشابه، چون برای هر چندجمله‌ای ناصفر، مشتق مرتبه mم آن، درجه اش با ضرب یک ضریب ناصفر در خودش برابر نمی‌تواند باشد، بنابراین نتیجه می‌شود این نگاشت نیز وارون پذیر است.

پرسش ۹ ـ (صفحه 93 ، شماره 11)

آ) اثر L_A بر E_i معادل با ضرب ماتریس A در E_i می‌باشد. حال دقت کنید که چون E_i تنها درایه ناصفرش، درایه iمش بوده و بقیه درایه هایش صفر هستند و همچنین سطر jم ماتریس A تنها در ستون $j+1$م درایه ناصفر دارد، در نتیجه تنها درایه ناصفر AE_i ، درایه $i-1$م آن است که حاصل ضرب سطر $i-1$م A در E_i بوده و باتوجه به توصیفاتی که کردیم، برابر 1 می‌باشد.
ب) به پرسش 6 تمرین 2 مراجعه کنید.