**دانشکده‌ی علوم ریاضی**

**جبرخطی** مدرس: دکتر علیرضا رنجبر

# تمرین سری چهار

## پرسش ۱ ــ ( صفحه 71 ، شماره 13 )

داریم:

$$P+Q=\frac{1}{2}(I+T)+\frac{1}{2}(I-T)=\frac{1}{2}((I+T)+(I-T))=\frac{1}{2}(I+T+I-T)=\frac{1}{2}(2I)=I$$

و در نتیجه $P+Q=I$.

$$P^2=\frac{1}{2}(I+T)\frac{1}{2}(I+T)=\frac{1}{4}(T^2+2IT+I^2)=\frac{1}{4}(I+2T+T^2)=\frac{1}{4}(2I+2T)=\frac{1}{2}(I+T)=P$$

دقت کنید که در بالا از این حقیقت ها استفاده کردیم که $I$ و $T$ جابجاپذیر بوده و داریم $IT=TI$ و همچنین $T^2=I$.

$$Q^2=\frac{1}{2}(I-T)\frac{1}{2}(I-T)=\frac{1}{4}(T^2-2IT+I^2)=\frac{1}{4}(I-2T+T^2)=\frac{1}{4}(2I-2T)=\frac{1}{2}(I-T)=Q$$

این اثبات کاملا مشابه حالت قبلی است.

$$PQ=\frac{1}{2}(I+T)\frac{1}{2}(I-T)=\frac{1}{4}(T^2-I)=\frac{1}{4}(I-T)(I+T)=\frac{1}{2}(I-T)\frac{1}{2}(I+T)=QP$$

اینجا نیز مجددا از جابجاپذیری $I$ و $T$ استفاده کردیم، و همچنین دقت کنید که چون داریم $T^2=I$ ، در نتیجه $PQ=QP=0$ می‌باشد(چرا؟).

## پرسش ۲ ــ ( صفحه 71 ، شماره 16 )

دو فضای خطی $V$ و $W$ یکریخت اند، هرگاه دو نگاشت خطی مانند $A:V\to W$ و $B:W\to V$ وجود داشته باشند به طوری که $AB=BA=I$. حال می‌توانیم پایه $v_1,v_2,\ldots,v_n$ را برای $V$ و $w_1,w_2,\ldots,w_n$ را برای $W$ در نظر بگیریم. بنابراین اگر $A$ و $B$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$A_{v_i}=w_i, Bw_i=v_i$$

به راحتی می‌توان مشاهده کرد که $A$ و $B$ نگاشت های خطی‌ای هستند که روی کل فضاهای متناظرشان تعریف شده اند و همچنین داریم $AB=BA=I$ (چرا؟) و در نتیجه $V$ و $W$ یکریخت می‌باشند.

## پرسش ۳ ــ ( صفحه 71 ، شماره 17 )

ابتدا می‌دانیم که شرط لازم و کافی برای این که $A^{-1}$ وجود داشته باشد این است که پوچی $A = \{0\}$ باشد. حال یک بردار دلخواه $v$ را درون این فضای برداری در نظر بگیرید، داریم:

$$A^2v - Av + Iv = A^2v = Av + v = Ov = O$$

(دقت کنید که $O$ را نیز می‌توان به صورت یک نگاشت خطی در نظر گرفت که هر برداری را به 0 می‌نگارد) حال اگر $v \in KerV$ باشد، آنگاه از عبارت بالا نتیجه می‌شود باید داشته باشیم $v = 0$ (چرا؟) و بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم که $A$ وارون پذیر است و $A^{-1}$ وجود دارد.
همچنین داریم:

$$A^{-1}(A^2 - A + I) = A - I + A^{-1} = O \Leftrightarrow A^{-1} = I - A$$

و بنابراین $A^{-1} = I - A$ می‌باشد.

## پرسش ۴ ــ ( صفحه 72 ، شماره 20 )

فرض کنید $v \in KerBA$ باشد. حال چون می‌دانیم $KerA = \{O\}$ بنابراین $v$ یا بردار 0 است، یا بردار ناصفر $u$ موجود است که داریم $Av = u$ و در نتیجه $BAv = Bu$ حال چون فرض کردیم $v$ در پوچی $BA$ قرار دارد، بنابراین باید داشته باشیم $Bu = 0$. اما دقت کنید که از طرفی طبق فرض سوال می‌دانیم $KerB = \{O\}$ و از طرف دیگر $u$ برداری ناصفر است. در نتیجه چنین $u$ ای نمی‌تواند وجود داشته باشد و نتیجه می‌شود پوچی $BA$ نیز برابر $\{O\}$ است اگر پوچی هر دو $A$ و $B$ برابر $\{O\}$ باشد.

## پرسش ۵ ــ ( صفحه 72 ، شماره 21 )

طبق نحوه تعریف $BA$ می‌دانیم نگاشتی خطی از $V$ به $U$ می‌باشد. حال یک بردار دلخواه $u \in U$ را در نظر بگیرید، می‌دانیم اگر $B$ پوشا باشد، بردار $w \in W$ وجود دارد که $Bw = u$ باشد. همچنین اگر $A$ نیز نگاشتی پوشا باشد، بردار $v \in W$ وجود دارد که $Av = u$ باشد. در نتیجه داریم $BAv = u$ و بنابراین نشان دادیم اگر $A$ و $B$ پوشا باشند، به ازای هر $u \in U$ دلخواه، می‌توان $v \in V$ را پیدا کرد که $BAv = u$ باشد و در نتیجه $BA$ نیز نگاشتی پوشا می‌باشد.