دانشکده‌ی علوم ریاضی

جبرخطی مدرس: دکتر علیرضا رنجبر

تمرین سری سه

پرسش ۱ ـ (صفحه 64 ، شماره 9)

فرض کنید V فضای همه توابعی باشد که بی نهایت بار مشتق پذیرند(مشتق مرتبه n ام آنها برای هر $n > 0$ و طبیعی موجود است) و همچنین $D : V \to V$ عملگر مشتق باشد.

آ) قرار دهید $L = D - I$ که I در اینجا نگاشت همانی است. پوچی [۱] L را توصیف کنید.

ب) سوال قبل را در حالتی که $L = D - aI$ که a یک عدد می‌باشد، حل کنید.

پرسش ۲ ـ (صفحه 64 ، شماره 10)

آ) بعد زیرفضایی از K^n متشکل از همه بردار های A به صورتی که $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$ می‌باشد، چند است؟

ب) بعد زیرفضایی از فضای ماتریس های $n \times n$ که در آنها داریم

$$a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0$$

چند است؟

پرسش ۳ ـ (صفحه 64 ، شماره 11)

فرض کنید $A = (a_{ij})$ یک ماتریس $n \times n$ باشد. تریس [۲] ماتریس A را به صورت جمع درایه های روی قطر اصلی اش تعریف کنید، یعنی:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

آ) نشان دهید که تریس یک نگاشت خطی از فضای ماتریس های $n \times n$ به K می‌باشد.

ب) اگر A و B ماتریس های $n \times n$ باشند، نشان دهید داریم:

$$tr(AB) = tr(BA).$$

---

[۱] Kernel

[۲] Trace

پ) اگر B وارون پذیر باشد، نشان دهید داریم:

$$tr(B^{-1}AB) = tr(A).$$

ت) اگر A و B ماتریس های $n \times n$ باشند، نشان دهید رابطه

$$(A, B) \mapsto tr(AB) =< A, B >$$

سه شرط یک ضرب داخلی(نقطه ای [3]) را دارا می‌باشد(برای تعریف کامل ضرب داخلی به فصل 5 مراجعه کنید).
ث) نشان دهید هیچ دو ماتریس A و B ای را نمی‌توان یافت که داشته باشیم

$$AB - BA = I_n.$$

پرسش ۴ ــ (صفحه 64 ، شماره 13)

نشان دهید اگر A یک ماتریس $n \times n$ با درایه های حقیقی و متقارن باشد داریم:

$$tr(AA) \geq 0$$

و اگر $A \neq O$ آنگاه $tr(AA) > 0$ می‌باشد.

پرسش ۵ ــ (صفحه 65 ، شماره 16)

فرض کنید M فضای همه ماتریس های $n \times n$ باشد. همچنین

$$F : M \mapsto M$$

نگاشتی باشد که

$$F(A) = \frac{A - A^T}{2}.$$

آ) نشان دهید F خطی است.
ب) پوچی F را توصیف و بعدش را تعیین کنید.

پرسش ۶ ــ (صفحه 66 ، شماره 18)

فرض کنید U و W زیرفضاهایی از یک فضای برداری V باشند. نشان دهید داریم:

$$dimU + dimW = dim(U + W) + dim(U \cap W).$$

[3] Scalar

پرسش ۷ ــ (صفحه 71 ، شماره 10)

فرض کنید V یک فضای برداری باشد. $P : V \to V$ را به صورتی در نظر بگیرید که داشته باشیم $P^2 = P$. نشان دهید

$$V = Ker\ P + Im\ P, Ker\ P \cap Im\ P = O,$$

به عبارتی دیگر، V جمع مستقیم $Ker\ P$ و $Im\ P$ می‌باشد.

پرسش ۸ ــ (صفحه 71 ، شماره 11)

فرض کنید V یک فضای برداری باشد، و P و Q نگاشت هایی خطی از V به خودش باشند. نشان دهید که اگر P و Q خواص زیر را داشته باشند:

- $P + Q = I.$
- $PQ = QP = O.$
- $P^2 = P, Q^2 = Q.$

آنگاه V برابر جمع مستقیم $Im\ P$ و $Im\ Q$ می‌باشد.