دانشکده‌ی علوم ریاضی

جبرخطی مدرس: دکتر علیرضا رنجبر

تمرین سری دو

پرسش ۱ ــ (صفحه 38 ، شماره 10)

فرض کنید M یک ماتریس $n \times n$ باشد به طوری که داشته باشیم $M^T = M$. دو بردار در فضای n بعدی مانند A و B را در نظر می‌گیریم و تعریف می‌کنیم $< A, B >= A^T M^T B$. (یک ماتریس 1×1 را مانند یک عدد در نظر بگیرید.) نشان دهید که تمام شرایط ضرب داخلی(scalar) به جز شرط مثبت بودن برای این عملگر برقرار می‌باشد. مثالی از ماتریس M و بردار های A و B ارائه کنید که AM^TB منفی باشد.

پرسش ۲ ــ (صفحه 39 ، شماره 16)

فرض کنید X یک بردار ستونی باشد به طوری که همه درایه هایش به جز درایه i م برابر صفر می‌باشند. همچنین فرض کنید A ماتریسی باشد به طوری که بتوانیم ضرب AX را انجام دهیم.در این صورت AX را توصیف کنید.

پرسش ۳ ــ (صفحه 39 ، شماره 17)

فرض کنید A ماتریسی $m \times n$ و همچنین B ماتریسی $n \times s$ باشد. C را به صورت $C = AB$ در نظر بگیرید. نشان دهید که ستون k م C را می‌توان صورت زیر نوشت:

$$C^k = b_{1k}A^1 + b_{2k}A^2 + \cdots + b_{nk}A^n$$

پرسش ۴ ــ (صفحه 40 ، شماره 23)

ماتریس A را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

نشان دهید

$$A^2 = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

همچنین A^n را به طور استقرایی برای هر n مثبت توصیف کنید.

پرسش ۵ ــ (صفحه 40 ، شماره 27)

نشان دهید برای هر دو ماتریس دلخواه $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$ داریم:

$$tr(AB) = tr(BA)$$

پرسش ۶ ــ (صفحه 42 ، شماره 36)

فرض کنید A یک ماتریس مثلثی با درایه های 1 روی قطر اصلی باشد:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

قرار دهید $N = A - I_n$. نشان دهید که $N^{n+1} = 0$. همچنین نشان دهید A وارون پذیر است و وارون آن به صورت زیر می‌باشد:

$$(I+N)^{-1} = I - N + N^2 - \cdots + (-1)^n N^n$$

پرسش ۷ ــ (صفحه 42 ، شماره 37)

اگر N یک ماتریس مربعی باشد به طوری که داشته باشیم $N^{r+1} = O$ برای یک r مثبت دلخواه، نشان دهید که $I - N$ وارون پذیر است و وارون آن برابر $I + N + \cdots + N^r$ می‌باشد.

پرسش ۸ ــ (صفحه 42 ، شماره 38)

فرض کنید A یک ماتریس مثلثی باشد

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

فرض کنید هیچ‌کدام از درایه هایی که روی قطر قرار گرفته اند برابر 0 نیستند و قرار دهید:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n}^{-1} \end{pmatrix}$$

نشان دهید BA و AB ماتریس هایی مثلثی با درایه 1 روی قطرشان هستند.

پرسش ۹ ــ (صفحه 42 ، شماره 39)

به یک ماتریس پوچ توان می‌گویند اگر $A^r = O$ باشد برای یک $r \geq 1$. فرض کنید A و B ماتریس های پوچ توان با اندازه یکسان باشند، و همچنین فرض کنید $AB = BA$. نشان دهید هر دو AB و $A + B$ ماتریس هایی پوچ توان هستند.