دانشکده‌ی علوم ریاضی

جبرخطی مدرس: دکتر علیرضا رنجبر

تمرین سری دو

پرسش ۱ ــ (صفحه 38 ، شماره 10)

از مطالب درس می‌دانیم که شرایط یک ضرب داخلی در یک فضای برداری به صورت زیر می‌باشند:

- به ازای هر دو عضو فضا مانند u و v داشته باشیم:

$$< u, v >=< v, u >$$

- به ازای هر سه عضو فضا مانند u و v و w داشته باشیم:

$$< u + v, w >=< u, w > + < v, w >$$

- به ازای هر دو عضو فضا مانند u و v و همچنین هر عضو میدان زمینه مانند k داشته باشیم:

$$< ku, v >= k < u, v >$$

- به ازای هر عضو فضا مانند u داشته باشیم:

$$< u, u >\geq 0$$

و همچنین تساوی تنها در حالتی برقرار باشد که

$$u = 0$$

حال نشان می‌دهیم ضرب معرفی شده در این شرایط(به جز شرط آخر) صدق می‌کند:
ابتدا دقت کنید که چون A و B بردارهایی $n \times 1$ و M ماتریسی $n \times n$ می‌باشد، $A^T M^T B$ ماتریسی 1×1 است. حال داریم:

$$< A, B >= (\sum_{i=1}^{n} A_i^T \sum_{j=1}^{n} M_{j,i}^T) B = \sum_{i=1}^{n} (A_i^T \sum_{j=1}^{n} M_{j,i}^T) B_i$$

حال چون داریم: $M^T = M^{T^T} = M$ در نتیجه می‌توانیم بنویسیم:

$$\sum_{i=1}^{n}(A_i^T \sum_{j=1}^{n} M_{j,i}^T)B_i = \sum_{i=1}^{n}(A_i^T \sum_{j=1}^{n} M_{i,j})B_i$$

حال چون هر کدام از درایه های A^T و B یک عدد حقیقی هستند داریم:

$$\sum_{i=1}^{n}(A_i^T \sum_{j=1}^{n} M_{i,j})B_i = \sum_{i=1}^{n} A_i^T(\sum_{j=1}^{n} M_{i,j})B_i = \sum_{i=1}^{n} B_i^T(\sum_{j=1}^{n} M_{i,j})A_i$$

همچنین

$$\sum_{i=1}^{n} B_i^T(\sum_{j=1}^{n} M_{i,j})A_i = \sum_{i=1}^{n} B_i^T(\sum_{j=1}^{n} M_{j,i}^T)A_i = (\sum_{i=1}^{n} B_i^T \sum_{j=1}^{n} M_{j,i}^T)A = B^T M^T A =< B, A >$$

و در نتیجه حکم مورد نظرمان اثبات می‌شود.
حال بردار سطری C را در نظر بگیرید. داریم:

$$< A+C, B >= \sum_{i=1}^{n}(A+C)_i \sum_{j=1}^{n} M_{j,i}^T B = \sum_{i=1}^{n} A_i \sum_{j=1}^{n} M_{j,i}^T B + \sum_{i=1}^{n} C_i \sum_{j=1}^{n} M_{j,i}^T B =< A, B > + < C, B >$$

و بنابراین این خاصیت نیز برقرار می‌باشد.
برای خاصیت سوم نیز داریم:

$$< kA, B >= (\sum_{i=1}^{n} kA_i^T \sum_{j=1}^{n} M_{j,i}^T)B = k(\sum_{i=1}^{n} A_i^T \sum_{j=1}^{n} M_{j,i}^T)B = k < A, B >$$

و بنابراین در این خاصیت نیز ضربمان صدق می‌کند و خواسته ابتدایی سوال را ثابت کردیم.
در حالت ساده می‌توان M را یک ماتریس 1×1 در نظر گرفت و به سادگی بررسی کرد که اگر درایه‌اش منفی باشد آنگاه ضرب مورد نظر منفی خواهد بود. اما در $n = 2$ و بالاتر نیز حکم را می‌توان با در نظر گرفتن ماتریس هایی مانند

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

نشان داد.

پرسش ۲ ــ (صفحه 39 ، شماره 16)

چون هر درایه ماتریس به صورت حاصل ضرب سطر iم ماتریس A در بردار ستونی X می‌باشد، همچنین چون تنها درایه ناصفر ماتریس X درایه iمش می‌باشد، بنابراین حاصلضرب این دو ماتریس برابر با ستون iم ماتریس A می‌باشد که این امر را با تعریف ضرب ماتریسی نیز می‌توان بررسی کرد.

پرسش ۳ ــ (صفحه 39 ، شماره 17)

درایه iم ستون kم ماتریس C ، معادل درایه در سطر i و ستون kم ماتریس می‌باشد و بنابراین طبق تعریف ضرب ماتریسی برابر حاصل ضرب سطر iم A در ستون Kم B است.بنابراین داریم:

$$C_{i,k} = \sum_{t=1}^{n} A_{i,t} B_{t,k}$$

حال توجه کنید که در اینجا چون i مقادیر 1 تا n را اتخاذ می‌کند، با تغییر i ، جمعوند دوم عبارت بالا به ازای هر t ثابت خواهد ماند؛ در نتیجه اگر به جای $A_{i,t}$ ، A^i را قرار دهیم، به جای t می‌توان جمع را برروی i نوشت و بنابراین خواهیم داشت:

$$C^k = \sum_{i=1}^{n} b_{i,t} A^i$$

که معادل حکم مورد نظرمان می‌باشد.

پرسش ۴ ــ (صفحه 40 ، شماره 23)

طبق تعریف ضرب ماتریسی داریم:

$$A^2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 & -2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ 2\sin(\theta)\cos(\theta) & \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 \end{pmatrix}$$

که براساس قوانین مثلثاتی می‌دانیم به صورت زیر می‌باشند:

$$A^2 = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

همچنین به صورت مشابه می‌توان ثابت کرد که

$$A^4 = \begin{pmatrix} \cos(4\theta) & -\sin(4\theta) \\ \sin(4\theta) & \cos(4\theta) \end{pmatrix}$$

و همچنین برای هر $n = 2^k$ داریم:

$$A^{2^k} = \begin{pmatrix} \cos(2^k\theta) & -\sin(2^k\theta) \\ \sin(2^k\theta) & \cos(2^k\theta) \end{pmatrix}$$

پرسش ۵ ــ (صفحه 40 ، شماره 27)

کافی است صرفا باتوجه به تعریف تریس و ضرب ماتریسی جمعوند ها را باز کنیم. خواهیم داشت:

$$tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}B_{j,i} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} B_{j,i}A_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} (BA)_{j,j} = tr(BA)$$

پرسش ۶ ــ (صفحه 42 ، شماره 36)

می‌دانیم N به صورت زیر می‌باشد:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

حال با استقرا روی i ثابت می‌کنیم که N^i به صورت زیر می‌باشد:

$$N^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & x_{1,i+1} & x_{1,i+2} & \dots & x_{1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x_{2,i+2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & x_{n-i,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

برای $i = 1$ به سادگی می‌توان مشاهده کرد که حکم مورد نظر برقرار است. حال فرض کنید به ازای هر $i \leq k$ حکم برقرار باشد، نشان می‌دهیم حکم برای $i = k + 1$ نیز برقرار خواهد بود.
برای این امر دقت کنید که داریم:

$$N^{k+1} = N^k N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & x_{1,k+1} & x_{1,k+2} & \dots & x_{1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x_{2,k+2} & \dots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & x_{n-k,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} N =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & x_{1,k+1} & x_{1,k+2} & \dots & x_{1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x_{2,k+2} & \dots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & x_{n-k,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

حال به بررسی ستون tم ماتریس حاصلضرب این دو ماتریس می‌پردازیم؛ دقت کنید که می‌دانیم درایه واقع در سطر jم و ستون tم این ماتریس، تنها در حالتی ناصفر است که دو حداقل یکی از جمعوند های ضرب سطر jم ماتریس

سمت چپ در ستون tم ماتریس سمت راست ناصفر باشد(باتوجه به تعریف ضرب ماتریسی). حال چون می‌دانیم باتوجه به ساختار دو ماتریس $k+j-1$ درایه اول سطر jم ماتریس چپی و $n-t+1$ درایه آخر ستون tم ماتریس راستی برابر صفر هستند، بنابراین این درایه تنها در صورتی ناصفر است که داشته باشیم:

$$k+j \leq t-1 \Leftrightarrow k \leq t-j-1$$

و بنابراین ساختار ماتریس حاصلضرب به صورت زیر می‌باشد:

$$N^{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & y_{1,k+2} & y_{1,k+3} & \cdots & y_{1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & y_{2,k+3} & \cdots & y_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & y_{n-k-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

که همان ساختار مدنظرمان است و بنابراین حکم اثبات می‌شود.
حال دقت کنید که باتوجه به ساختاری که برای فرم ماتریس N^i اثبات کردیم به سادگی می‌توان دید که به ازای هر $i \geq n$ ، N^i ماتریس تمام صفر می‌باشد.
حال چون $A = I + N$ است، اگر A را در عبارت داده شده ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$A(I - N + N^2 - \cdots + (-1)^n N^n) = (I+N)(I - N + N^2 - \cdots + (-1)^n N^n) =$$

$$(I - N + N^2 - \cdots + (-1)^n N^n) + (N - N^2 + \cdots - (-1)^{n+1} N^{n+1}) = I - (-1)^{n+1} N^{n+1} = I$$

که برابری آخر از حکمی که برای N^{n+1} اثبات کردیم نتیجه می‌شود و بنابراین A وارون پذیر و وارونش برابر عبارت داده شده می‌باشد.

پرسش ۷ ـ (صفحه 42 ، شماره 37)

کافی است که حاصلضرب این دو ماتریس را بنویسیم؛ خواهیم داشت:

$$(I-N)(I+N+\cdots+N^r) = (I+N+\cdots+N^r) - (N+N^2+\cdots+N^{r+1}) = I - N^{r+1} = I$$

و بنابراین $I-N$ وارون پذیر و وارونش برابر عبارت داده شده می‌باشد.

پرسش ۸ ـ (صفحه 42 ، شماره 38)

درایه واقع در سطر و ستون iم ماتریس های AB و BA به صورت حاصل ضرب سطر iم ماتریس A در ستون jم ماتریس B می‌باشد(و برعکس). در نتیجه می‌توان این درایه ها را به صورت زیر نوشت:

$$(AB)_{i,i} = (BA)_{i,i} = 0*0 + 0*0 + \cdots + a_{i,i} * a_{i,i}^{-1} + a_{i,i+1} * 0 + \cdots + a_{i,n} * 0 = 1$$

و در نتیجه هر درایه روی قطر این ماتریس ها برابر با 1 می‌باشد(دقت کنید که جابجا کردن(به این شکل!) ضرب شدن یک سطر از یک ماتریس در ستون یک ماتریس دیگر با یکدیگر تفاوتی در نتیجه ضرب به وجود نمی‌آورد). همچنین چون هر دو A و B بالامثلثی هستند، بنابراین هر دو AB و BA نیز بالامثلثی می‌باشند(چرا؟) و در نتیجه حکم موردنظر سوال به اثبات می‌رسد.

پرسش ۹ ــ (صفحه 42 ، شماره 39)

داریم:

$$(AB)^2 = ABAB$$

و چون طبق فرض سوال $AB = BA$ می‌باشد، در نتیجه

$$(AB)^2 = AABB$$

همچنین به طریق مشابه می‌توان ثابت کرد که

$$(AB)^3 = AAABBB$$

و در نتیجه با استفاده از استقرا و به سادگی می‌توان نشان داد که برای هر $k \geq 1$ داریم

$$(AB)^k = \underbrace{AA\ldots A}_{k}\underbrace{BB\ldots B}_{k}$$

در نتیجه باتوجه به فرض سوال داریم

$$(AB)^r = \underbrace{AA\ldots A}_{r}\underbrace{BB\ldots B}_{r} = 0\,\underbrace{BB\ldots B}_{r} = 0$$

و بنابراین AB نیز ماتریسی پوچ توان می‌باشد.
برای ماتریس $A + +B$ نیز مشابه قسمت قبل می‌توان عمل کرد و دید که هر کدام از جمعوند های حاصل از

$$(A+B)^{2r}$$

متشکل از تعدادی ماتریس A و تعدادی B هستند که مجموعشان برابر $2r$ می‌شود و همچنین یک ضریب عددی نیز دارند که در اینجا برایمان اهمیتی ندارد. اما چون A و B جابجا می‌شوند(طبق فرض سوال) بنابراین هر کدام از این عبارت ها را می‌توان به صورتی درآورد که ماتریس های A در ابتدا و B در انتها ظاهر شوند. حال چون مجموع تعداد این دو ماتریس برابر $2r$ است، بنابراین در هر جمعوند حداقل یکی از آنها هست که حداقل r تا از آن وجود دارد و بنابراین باتوجه به پوچ توان بودن هر کدام از A و B می‌توانیم نتیجه بگیریم که هرکدام از این جمعوند ها برابر 0 خواند شد و بنابراین $(A+B)^r$ نیز برابر صفر بوده و ماتریسی پوچ‌توان می‌باشد.