دانشکده‌ی علوم ریاضی

جبرخطی مدرس: دکتر علیرضا رنجبر

تمرین سری یازدهم

پرسش ۱ ــ (صفحه 222 ، شماره 3)

فرض کنید V یک فضای برداری متناهی بعدی همراه با یک ضرب داخلی معین مثبت باشد. می‌گوییم A معین مثبت است اگر $< Av, v > > 0$ برای هر $v \in V$ و $v \neq O$. احکام زیر را ثابت کنید:

آ) اگر A معین مثبت باشد، آنگاه تمام مقادیر ویژه اش مثبت هستند.

ب) اگر A معین مثبت باشد، آنگاه نگاشت خطی متقارن B وجود دارد به نحوی که داشته باشیم $B^2 = A$ و $BA = AB$. مقادیر ویژه B را نیز بدست آورید.

پرسش ۲ ــ (صفحه 223 ، شماره 5)

نشان دهید اگر A متقارن و معین مثبت باشد، آنگاه A^2 و A^{-1} نیز متقارن و معین مثبت می‌باشند.

پرسش ۳ ــ (صفحه 223 ، شماره 6)

فرض کنید $A : R^n \to R^n$ نگاشت خطی‌ای وارون پذیر باشد.

آ) نشان دهید $A^T A$ متقارن و معین مثبت می‌باشد.

ب) باتوجه به تمرین $3b$ ، نگاشت خطی متقارن و معین مثبت B وجود دارد به طوری که $B^2 = A^T A$. $U = AB^{-1}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید U یکانی [۱] است.

پ) اثبات کنید $A = UB$.

پرسش ۴ ــ (صفحه 223 ، شماره 7)

اثبات کنید اگر B متقارن، معین مثبت و یکانی باشد، آنگاه باید داشته باشیم:

$$B = I.$$

[۱] Unitary

پرسش ۵ ــ (صفحه 223 ، شماره 8)

اثبات کنید که یک ماتریس حقیقی A معین مثبت است اگر و تنها اگر ماتریس ناتکین ۲ N وجود داشته باشد به طوری که داشته باشیم:

$$A = N^T N$$

.

پرسش ۶ ــ (صفحه 223 ، شماره 11)

V را به صورتی که در بخش 4م تعریف شده است در نظر بگیرید. فرض کنید $A : V \to V$ یک نگاشت خطی متقارن باشد. v_1, v_2 را دو مقدار ویژه از A با مقادیر ویژه λ_1, λ_2 در نظر بگیرید. نشان دهید اگر $\lambda_1 \neq \lambda_2$ آنگاه v_1 بر v_2 عمود است.

پرسش ۷ ــ (صفحه 224 ، شماره 18)

فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ حقیقی، ناتکین و متقارن باشد. احکام زیر را اثبات کنید:

آ) اگر λ یک مقدار ویژه A باشد، آنگاه $\lambda \neq 0$.

ب) اگر λ یک مقدار ویژه A باشد، آنگاه λ^{-1} نیز مقدار ویژه A^{-1} می‌باشد.

پ) ماتریس های A و A^{-1} بردار های ویژه یکسانی دارند.

پرسش ۸ ــ (صفحه 225 ، شماره 24)

V را به همان صورتی که در بخش 4 م تعریف شده در نظر بگیرید و فرض کنید $A : V \to V$ یک عملگر متقارن باشد. یک زیرفضا W را می‌گوییم تحت A ناوردا یا پایدار است، در صورتی که به ازای هر $w \in W$ داشته باشیم $Aw \in W$. یا به عبارتی $AW \subset W$ باشد. نشان دهید اگر A هیچ زیرفضای ناوردایی جز O و V نداشته باشد، آنگاه A به صورت $A = \lambda I$ برای یک λ دلخواه می‌باشد.

---

[۲] Non-Singular