دانشکده‌ی علوم ریاضی

جبرخطی مدرس: دکتر علیرضا رنجبر

تمرین سری یک

پرسش ۱ ــ (صفحه 9 ، شماره 1)

$$cO = c(v + (-v)) = cv + c(-v) = cv + (-cv) = O$$

پرسش ۲ ــ (صفحه 9 ، شماره 4)

$$v + w = O \Rightarrow (v + w) + (-v) = -v \Rightarrow$$
$$(w + v) + (-v) = -v \Rightarrow w + (v + (-v)) = (-v) \Rightarrow$$
$$w + O = -v \Rightarrow w = -v$$

پرسش ۳ ــ (صفحه 9 ، شماره 6)

دو بردار دلخواه مانند v و w که بر A_1 و A_2 عمود هستند را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$v.A_1 = 0, v.A_2 = 0$$

و همچنین

$$w.A_1 = 0, w.A_2 = 0$$

حال می‌دانیم $(v + w).u = v.u + w.u$ و در نتیجه داریم:

$$(v + w)A_1 = v.A_1 + w.A_1 = 0 + 0 = 0$$

و همچنین

$$(v + w)A_2 = v.A_2 + w.A_2 = 0 + 0 = 0$$

در نتیجه بردار $v + w$ نیز بر هر دو A_1 و A_2 عمود می‌باشد. حال یک بردار دلخواه t که عمود بر A_1 و A_2 است را در نظر بگیرید؛ برای هر $r \in R$ داریم:

$$(rt).A_1 = r(t.A_1) = r(0) = 0$$

و همچنین

$$(rt).A_2 = r(t.A_2) = r(0) = 0$$

و در نتیجه بردار rt نیز بر هر دو A_1 و A_2 عمود می‌باشد. همچنین 0^n نیز به وضوح بر هر دو A_1 و A_2 عمود است. در نتیجه حکم ثابت می‌شود و تمام بردار هایی که بر هر دو A_1 و A_2 عمود هستند تشکیل یک زیرفضا می‌دهند.

پرسش ۴ ــ (صفحه 9 ، شماره 9)

آ) بدیهی است که $(0,0,0)$ یک بردار درون مجموعه گفته شده می‌باشد. همچنین فرض کنید دو بردار (x,y,z) و (x',y',z') درون این مجموعه داشته باشیم؛ این یعنی داریم:

$$x+y+z=0$$

و

$$x'+y'+z'=0$$

و در نتیجه برای $(x+x',y+y',z+z')$ نیز داریم:

$$(x+x')+(y+y')+(z+z')=(x+y+z)+(x'+y'+z')=0+0=0$$

همچنین اگر یک عضو دلخواه فضا مانند (u,v,w) و یک $r\in R$ را در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$ru+rv+rw=r(u+v+w)=r0=0$$

و در نتیجه (ru,rv,rw) نیز متعلق به این مجموعه می‌باشد. بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم که مجموعه گفته شده یک زیرفضا است.

ب) بدیهی است که $(0,0,0)$ یک بردار درون مجموعه گفته شده می‌باشد. همچنین فرض کنید دو بردار (x,y,z) و (x',y',z') درون این مجموعه داشته باشیم؛ این یعنی داریم:

$$x=y, 2y=z$$

و

$$x'=y', 2y'=z'$$

و در نتیجه برای $(x+x',y+y',z+z')$ نیز داریم:

$$(x+x')=(y+y'), 2(y+y')=2y+2y'=(z+z')$$

همچنین اگر یک عضو دلخواه فضا مانند (u,v,w) و یک $r\in R$ را در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$u=v\Rightarrow ru=rv, 2v=w\Rightarrow 2rv=rw$$

و در نتیجه (ru,rv,rw) نیز متعلق به این مجموعه می‌باشد. بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم که مجموعه گفته شده یک زیرفضا است.

پ) بدیهی است که $(0,0,0)$ یک بردار درون مجموعه گفته شده می‌باشد. همچنین فرض کنید دو بردار (x,y,z) و (x',y',z') درون این مجموعه داشته باشیم؛ این یعنی داریم:

$$x+y=3z$$

و

$$x'+y'=3z'$$

و در نتیجه برای $(x+x',y+y',z+z')$ نیز داریم:

$$(x+x')+(y+y')=(x+y)+(x'+y')=3z+3z'=3(z+z')$$

همچنین اگر یک عضو دلخواه فضا مانند (u,v,w) و یک $r\in R$ را در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$ru+rv=r(u+v)=r(3z)=3rz$$

و در نتیجه (ru,rv,rw) نیز متعلق به این مجموعه می‌باشد. بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم که مجموعه گفته شده یک زیرفضا است.

پرسش ۵ ــ (صفحه 9 ، شماره 10)

حکم را برای $U \cap W$ اثبات می‌کنیم؛ ابتدا بدیهی است که چون $0 \in U$ و همچنین $0 \in W$ در نتیجه $0 \in U \cap W$ نیز می‌باشد. حال دو بردار دلخواه مانند u و w را از $U \cap W$ در نظر می‌گیریم، می‌دانیم که باتوجه به تعریف داریم $u \in U, u \in W, w \in U, w \in W$ ، و در نتیجه $u + w$ نیز در هر دو U و W وجود دارد. از این نتیجه می‌گیریم که $u + w \in U \cap W$ نیز برقرار می‌باشد. همچنین اگر یک عضو دلخواه از $V \cap W$ مانند x و یک c دلخواه از میدان مربوط به V را در نظر بگیریم، می‌دانیم باتوجه به این که U و W برداری هستند، $rx \in U, rx \in W$ که این نیز نتیجه می‌دهد $rx \in U \cap W$. در نتیجه حکم برقرار و $U \cap W$ یک زیرفضا می‌باشد.
حال حکم را برای حالت $U + W$ بررسی می‌کنیم؛ ابتدا بدیهی است که چون $0 \in U$ و همچنین $0 \in W$ در نتیجه $0 + 0 = 0 \in U + W$ نیز می‌باشد. حال دو بردار دلخواه مانند u و w را از $U + W$ در نظر می‌گیریم، می‌دانیم که باتوجه به تعریف x, y, x', y' را می‌توان یافت به صورتی که داشته باشیم:

$$x \in U, y \in W, x' \in U, y' \in W, x + y = u, x' + y' = w$$

حال باتوجه به این که خود U و W برداری هستند می‌دانیم که داریم:

$$x + x' \in U, y + y' \in W$$

و در نتیجه

$$(x + x') + (y + y') = u + w \in U + W$$

و از این نتیجه می‌گیریم که $u + w \in U + W$ نیز برقرار می‌باشد. همچنین اگر یک عضو دلخواه از $V + W$ مانند x به طوری که $a \in U, b \in W$ داشته باشیم که $x = a + b$ و همچنین یک c دلخواه از میدان مربوط به V را در نظر بگیریم، می‌دانیم باتوجه به این که U و W برداری هستند، $ra \in U, rb \in W$ که این نیز نتیجه می‌دهد $r(a + b) = ra + rb = rx \in U + W$. در نتیجه حکم برقرار و $U + W$ یک زیرفضا می‌باشد.

پرسش ۶ ــ (صفحه 14 ، شماره 4)

اگر $ad = bc$ باشد، آنگاه در صورتی که بردار (a, b) را در $\frac{c}{a}$ ضرب کنیم(دقت کنید که بدون کم شدن از کلیت می‌توانیم فر ض کنیم که $a \neq 0$ زیرا در غیر این صورت تمام a و b و c و d برابر صفر خواهند بود که در این صورت نیز به طور واضحی دو بردار یکسان و در نتیجه وابسته خطی می‌شوند)، به بردار $(\frac{ac}{a}, \frac{bc}{a})$ که طبق فرض برابر $(c, \frac{ad}{a}) = (c, d)$ می‌رسیم و این یعنی توانستیم توسط بردار (a, b) بردار (c, d) را بسازیم که این به سادگی نتیجه می‌دهد ترکیب خطی نابدیهی‌ای از این دو بردار وجود دارد که برابر 0 شود و در نتیجه این دو بردار وابسته خطی می‌شوند.
حال فرض کنید $ad - bc \neq 0$ ، نشان می‌دهیم این دو بردار مستقل خطی خواهند بود در این صورت. برای این که جمع این دو بردار توسط یک ترکیب خطی که به بردار (a, b) ضریب x و به (c, d) ضریب y می‌دهد باید داشته باشیم:

$$ax + cy = 0, bx + dy = 0$$

حال در اینجا اگر معادله اول را در $\frac{b}{a}$ ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$bx + \frac{bcy}{a} = 0$$

و اگر معادله دوم را از این معادله کم کنیم داریم:

$$\frac{y(ad-bc)}{a}=0$$

که می‌دانیم در اینجا a صفر نیست و $ad-bc\neq 0$ نیز برقرار است. در نتیجه تنها حالت ممکن این است که $y=0$ باشد. اما اگر $y=0$ را در معادله اول قرار دهیم، نتیجه می‌گیریم که x نیز باید برابر 0 باشد، و این یعنی تنها ترکیب خطی‌ای که از دو بردابر (a,b) و (c,d) برابر 0 می‌شود ترکیب بدیهی است و در نتیجه در این حالت این دو بردار مستقل خطی می‌باشند.

پرسش ۷ ــ (صفحه 15 ، شماره 9)

به برهان خلف فرض می‌کنیم که چنین نباشد، یعنی $A_1,A_2,\ldots,A_r$ وابسته خطی باشند. این نیز یعنی a_i هایی وجود دارند به طوری که تمام آنها صفر نیستند و همچنین داریم:

$$a_1A_1+a_2A_2+\cdots+a_nA_n=0$$

حال فرض کنید که a_k ناصفر باشد، می‌توانیم بنویسیم:

$$a_1A_1+a_2A_2+\cdots+a_{k-1}A_{k-1}+a_{k+1}A_{k+1}+\ldots a_nA_n=a_kA_k$$

و سپس با تقسیم دو طرف به a_k (دقت کنید باتوجه به ناصفر بودن a_k این کار امکان پذیر می‌باشد)، بدست می‌آوریم:

$$\frac{a_1A_1+a_2A_2+\cdots+a_{k-1}A_{k-1}+a_{k+1}A_{k+1}+\ldots a_nA_n}{a_k}=A_k$$

حال اگر دو طرف این تساوی را در A_k ضرب نقطه‌ای کنیم، باتوجه به تعریف نقطه ای، طرف راست برابر مجموع مجذور مولفه های A_k می‌شود، در حالی که طرف چپ برابر صفر می‌شود(چون می‌دانیم طبق فرض A_k بر بقیه A_i ها عمود است) و این تناقض است. در نتیجه فرض خلف باطل و این بردار ها مستقل خطی می‌باشند.

پرسش ۸ ــ (صفحه 22 ، شماره 1)

با استدلالی مشابه سوال 6 می‌توانیم نشان دهیم که این دو بردار مستقل خطی هستند و چون بعد V نیز برار 2 است در نتیجه تشکیل یک پایه برای V می‌دهند(باتوجه به این که طول هر پایه در یک فضای برداری برابر بعد فضا می‌باشد). همچنین چون W و U فضا های تولید شده توسط این بردار ها هستند، در صورتی که عضو مشترکی به جز 0 داشته باشند، یعنی ضریبی مانند c_1 برای بردار $(2,1)$ و همچنین ضرایبی مانند c_2 برای بردار $(0,1)$ وجود دارند که اگر در این بردار ها ضرب شوند، بردار یکسانی را نتیجه می‌دهند و همچنین چون بعد هر کدام از این فضا ها 1 است، تمام بردار ها ضرب اسکالری از یکدیگر می‌باشند، و این نیز نتیجه می‌دهد که این دو بردار فضای یکسانی را تولید می‌کنند که این در تناقض با استقلال خطی آنهاست که پیش‌تر ثابت کردیم. در نتیجه تنها اشتراک این دو فضا نیز 0 می‌باشد و در نتیجه V حاصل جمع مستقیم U و W است. برای U' نیز استدلال ها کاملا مشابه قسمت قبل می‌باشند.

پرسش ۹ ــ (صفحه 22 ، شماره 4)

با استفاده از بردار های به صورت

$$(u_i, 0)$$

و

$$(0, w_j)$$

می‌توانیم پایه ای را برای $U \times W$ بسازیم، زیرا هر عضو به صورت (a, b) را می‌توان به صورت جمع دو بردار $(a, 0)$ و $(0, b)$ نوشت که به راحتی می‌توان مشاهده کرد هر کدام از این دو بردار را می‌توان توسط بردار های پایه ای که گفتیم تولید کرد(باتوجه به این که هر کدام از a و b را می‌توان در U و W توسط بردار های پایه‌ای متناظر تولید کرد). همچنین این بردار ها مستقل خطی نیز هستند، چون هر ترکیب خطی از یک گروه از بردار ها یکی از مولفه ها را صفر نگه می‌دارد و تنها دیگیری را تغییر می‌دهد، و همچنین نسبت به آن مولفه نیز می‌دانیم بردار ها مستقل خطی اند. بنابراین باتوجه به این که تنها راهی که بتوان بردار $(0, 0)$ را تولید کرد این است که روی هر کدام از مولفه هایش 0 را تولید کنیم و این کار نیز تنها با ترکیبی بدیهی از بردار های پایه‌ای امکان پذیر است، در نتیجه هیچ ترکیب نابدیهی‌ای از این بردار ها وجود ندارد که بردار $(0, 0)$ را بتواند تولید کند و این یعنی این بردار ها مستقل خطی می‌باشند. در نتیجه مجموعه‌ای مستقل خطی ارائه کردیم که کل فضا را نیز تولید می‌کند و در نتیجه این مجموعه یک پایه برای کل فضا می‌باشد.