

میان ترم جبر خطی ۱ سری دوم

در تمام سوالات V یک فضای برداری با بعد n روی \mathbb{R} یا \mathbb{C} است.

سوال اول

فرض کنید $T^2 = I$ و $T \in \mathcal{L}(V)$ نشان دهید $V = \text{Im}(I + T) \oplus \text{Im}(I - T)$.

سوال دوم

فرض کنید U زیرفضای تولیدشده در \mathbb{R}^5 توسط بردارهای زیر باشد:

$$u_1 = (0, 1, 2, -1, 0), \quad u_2 = (1, 6, -3, 0, 2), \quad u_3 = (4, -2, 0, 1, -1)$$

پایه‌ای برای پوچ‌ساز U پیدا کنید.

سوال سوم

فرض کنید $T \in \mathcal{L}(V)$ و U زیرفضایی است از V که تحت T پایا است. نشان دهید هر مقدار ویژه عملگر T/U یک مقدار ویژه T است.

سوال چهارم

فرض کنید A, B ماتریس‌هایی از سایز $m \times n, k \times n$ باشند به طوری که برای هر بردار دلخواه x داریم اگر $Ax = 0$ آنگاه $Bx = 0$. ثابت کنید ماتریس $k \times m$ مانند C وجود دارد که $B = CA$.

سوال پنجم

بردارهای v_1, \dots, v_m از V داده شده‌اند. نشان دهید که اگر داشته باشیم $m \geq n + 2$ آنگاه ضرایب اسکالر a_1, \dots, a_m که حداقل یکی از آن‌ها ناصفر است وجود دارند به طوری که داشته باشیم:

$$a_1 + \dots + a_m = 0, \quad a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0$$

سوال ششم

$f : V \rightarrow V$ یک عملگر خطی و W یک زیرفضای ناورد از V تحت f می‌باشد. اگر f قطری‌شدنی باشد نشان دهید $f|_W$ نیز قطری‌شدنی است.