پاسخنامه‌ی میان‌ترم جبر خطی۱
سری دوم

سوال اول

با توجه به‌این‌که $T^2 = I$ است داریم که:

$$T^2 = I \to (T+I)(T-I) = 0 \qquad (۱)$$

فرض کنید که $y \in Im(T-I)$ باشد؛ بنابراین وجود دارد $x \in V$ به‌طوری‌که $(T-I)x = y$ است. پس با ضرب کردن x از سمت راست در رابطه ۱ داریم:

$$(T+I)(T-I)x = 0 \to (T+I)y = 0 \to y \in ker(T+I)$$

پس نتیجه می‌شود که $Im(T-I) \subseteq ker(T+I)$ است. حال فرض کنید که $x \in ker(T+I)$ باشد. پس $(T+I)x = 0$ است. پس :

$$(T+I)x = 0 \to Tx + x = 0 \to Tx - x = -2x \to x = (T-I)\frac{-x}{2} \to x \in Im(T-I)$$

پس $ker(T+I) \subseteq Im(T-I)$ است. در نهایت از دو رابطه اخیر نتیجه می‌شود که $ker(T+I) = Im(T-I)$ است.
با توجه به قضیه اساسی داریم که $dim(ker(T+I)) + dim(Im(T+I)) = dim(V)$ است و با توجه به $ker(T+I) = Im(T-I)$ و جاگذاری آن در رابطه فوق نتیجه می‌شود که $dim(Im(T-I)) + dim(Im(T+I)) = dim(V)$ است. حال تنها کافی است ثابت کنیم که $Im(T-I) \cap Im(T+I) = \{0\}$ است. فرض کنید که $u \in Im(T-I) \cap Im(T+I)$ باشد. پس وجود دارد x, y به‌طوری‌که:

$$(T-I)x = u, (T+I)y = u$$

پس داریم:

$$(T-I)x = u \to Tx - x = u \to Tx = u + x \to (T^2)x = x = Tu + Tx = Tu + u + x \to Tu + u = 0 \qquad (۲)$$

$$(T+I)y = u \to Ty + y = u \to Ty = u - y \to (T^2)y = y = Tu - Ty = Tu - u + y \to Tu - u = 0 \qquad (۳)$$

که از روابط ۲ و ۳ نتیجه می‌شود که $u = 0$ است. پس $Im(T-I) \cap Im(T+I) = \{0\}$ است. پس حکم ثابت می‌شود.

سوال دوم

طبق تعریف، فضای پوچ‌ساز U^0 ، زیرفضایی است که در آن $cp(u) = 0$ است، پس داریم:

$$cp(u) = 0 \to cp(a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3) = 0 \to a_1cp(u_1) + a_2cp(u_2) + a_3cp(u_3) = 0$$

که با توجه به استقلال خطی داریم که باید $cp(u_1) = cp(u_2) = cp(u_3) = 0$ باشد. با توجه به اینکه u_1, u_2, u_3 مستقل خطی هستند، بنابراین بعد U برابر ۳ است و بنابراین بعد فضای پوچ ساز ۲ است. حال معادلات ما به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 2x_5 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

حال ۳ معادله و ۵ مجهول داریم و برای پیدا کردن پایه، x_1, x_2 را به دلخواه انتخاب می‌کنیم و سپس پایه‌ها به دست می‌آید:

$$x_1 = 1, x_2 = 0 \to u_1^0 = (1, 0, -9, -18, -14)$$
$$x_1 = 0, x_2 = 1 \to u_2^0 = (1, 1, -4, -7, -9)$$

و بنابراین دو بردار $u_1^0 = (1, 0, -9, -18, -14), u_2^0 = (1, 1, -4, -7, -9)$ یک پایه برای فضای پوچ ساز است.

سوال سوم

فرض کنید که λ یک مقدار ویژه‌ی T/U باشد. باید نشان دهیم که λ یک مقدار ویژه برای T است. وجود دارد $x + U \in V/U$ که $x \neq 0$ باشد به‌گونه‌ای که

$$(T/U)(x + U) = \lambda(x + U) \to Tx - \lambda x \in U$$

اگر که λ مقدار ویژه‌ای برای $T|_U$ باشد، آن‌گاه حکم واضح است. حال اگر λ مقدار ویژه‌ای برای T نباشد، آن‌گاه $T|_U - \lambda I : U \to U$ وارون پذیر است. پس وجود دارد $y \in U$ به‌طوری‌که:

$$(T|_U - \lambda I)y = Tx - \lambda x \to Ty - \lambda y = Tx - \lambda x$$

که $Tx - \lambda x \in U$ است. از طرفی داریم

$$T(x - y) = \lambda(x - y)$$

که $x - y \neq 0$ است؛ زیرا که $x \notin U$ و $y \in U$ است که این نتیجه می‌دهد که λ یک مقدار ویژه برای T است.

سوال چهارم

برای اثبات وجود C کافی‌است که آن را ماتریس یک تبدیل خطی از A به B در نظر بگیریم و این تبدیل خطی را بیابیم.
بردار دلخواه $v \in R^n$ را در نظر بگیرید. دو حالت زیر را داریم:
۱) اگر $v \in null(A)$ باشد، یعنی $Av = 0$ باشد، آن‌گاه $Bv = CAv = C0 = 0$ است و حکم برقرار است.
۲) اگر $v \notin null(A)$ باشد، آن‌گاه باید $Av \in Img(A)$ باشد. بنابراین C باید روی زیر فضای $Img(A)$ در R^m تعریف شود و خارج از آن دلخواه است.
فرض کنید که $dim(A) = t$ است. یک پایه مانند $v_1, v_2, \ldots, v_t$ برای $Img(A)$ در نظر بگیرید. سپس این پایه را گسترش می‌دهیم و $m - t$ عضو به آن اضافه می‌کنیم تا $v_1, v_2, \ldots, v_t, v_{t+1}, \ldots, v_m$ یک پایه برای R^m باشد. حال برای یافتن تبدیل C کافی است که این را بیابیم که C هر کدام از v_i ها را به چه چیزی تبدیل می‌کند.
همین‌طور برای $v_1, v_2, \ldots, v_t$ بردار های $u_1, u_2, \ldots, u_t \in R^n$ را در نظر بگیرید به‌طوری‌که $Av_i = u_i$ برقرار باشد. حال برای هر i که $1 \leq i \leq t$ است، $Cv_i = Bu_i$ و برای هر j که $t + 1 \leq j \leq m$ است، $Cv_j = 0$ را تعریف کنید. حال C را ماتریس $k \times m$ به دست آمده از تبدیل C با پایه‌هایی که در A, B استفاده کرده‌ایم، در نظر بگیرید. باید نشان دهیم که $B = CA$ است.
حال اگر $Av \neq 0$ باشد، بردار های $v_{t+1}, \ldots, v_n \in R^n$ را گسترش v_i ها($1 \leq i \leq t$) روی فضای R^n در نظر بگیرید. آن‌گاه اگر $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ باشد، داریم:

$$CAv = CA\sum_{i=1}^n a_i v_i = C\sum_{i=1}^n a_i Av_i = C\sum_{i=1}^t a_i u_i + 0 = \sum_{i=1}^t a_i Cu_i = \sum_{i=1}^t a_i Bv_i = \sum_{i=1}^n a_i Bv_i + \sum_{i=t+1}^n a_i Bv_i$$
$$= \sum_{i=1}^n a_i Bv_i = B\sum_{i=1}^n a_i v_i = Bv$$

و حکم ثابت می‌شود.

سوال پنجم

چون $m > n$ است، بنابراین $v_1, v_2, \dots, v_m$ وابسته خطی هستند. حال بردار های زیر را در نظر بگیرید:

$$u_1 = v_1 - v_m \ , u_2 = v_2 - v_m \ , \dots , u_{m-1} = v_{m-1} - v_m$$

چون $m - 1 > n$ است، پس بردار های $u_1, u_2, \dots, u_{m-1}$ نیز وابسته خطی هستند؛ بنابراین ضرایب(که حداقل یکی از آن‌ها ناصفر است) $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}$ وجود دارد به طوری‌که

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_{m-1} u_{m-1} = 0 \qquad (۴)$$

است. حال با جایگذاری $u_i = v_i - v_m$ برای هر i که $1 \leq i \leq m - 1$ در رابطه (۴) نتیجه می‌شود که

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_{m-1} v_{m-1} - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1}) v_m = 0 \qquad (۵)$$

حال چون حداقل یکی از a_i ها ناصفر بود، بنابراین در (۵) نیز حداقل یکی از ضرایب ناصفر است. همین‌طور با کمی دقت، می‌توانیم نتیجه بگیریم که مجموع ضرایب رابطه (۵) برابر صفر است. بنابراین حکم سوال اثبات شده است.

سوال ششم

اگر مقادیر ویژه‌ی متمایز f را $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ در نظر بگیریم و فضای ویژه‌ی λ_i را w_i بنامیم یعنی $w_i = ker(f - \lambda_i I)$ آن‌گاه چون f قطری شدنی است، بنابر قضیه‌ای خواهیم داشت:

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_t$$

حال چون W زیر فضای ناوردا نسبت به f از V است. ادعا می‌کنیم که

$$W = (W \cap W_1) \oplus (W \cap W_2) \oplus \cdots \oplus (W \cap W_t)$$

برقرار است. اگر که این ادعا ثابت شود به وضوح $f|_W$ قطری‌شدنی است؛ زیرا کافی است از هر کدام از $W \cap W_i$ ها یک پایه انتخاب کنیم که قطعا بردار ویژه‌ی f هستند و همگی در کنار هم یک پایه از بردار های ویژه‌ی $f|_W$ برای W خواهد بود.
برای اثبات طرف اول، یک بردار دلخواه $v \in W$ در نظر بگیرید. ادعا می‌کنیم که $w_1 \in W \cap W_1$ و ... و $w_t \in W \cap W_t$ موجودند که $v = w_1 + w_2 + \cdots + w_t$ برقرار است. ادعا می‌کنیم که هر کدام از w_i ها در $W \cap w_i$ است. بردار های v و $f(v)$ و $f^2(v)$ و ... و $f^{t-1}(v)$ همگی در W اند؛ زیرا که W نسبت به f ناوردا است. بنابراین داریم:

$$v = w_1 + w_2 + \cdots + w_t \in W$$
$$f(v) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_t w_t \in W$$
$$\cdots$$
$$f^{t-1}(v) = \lambda_1^{t-1} w_1 + \lambda_2^{t-1} w_2 + \cdots + \lambda_t^{t-1} w_t \in W$$

اکنون توجه داریم که نتیجه می‌شود:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \dots & \lambda_t \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \dots & \lambda_t^2 \\ \dots & & & \\ \lambda_1^{t-1} & \lambda_2^{t-1} & \lambda_3^{t-1} \dots & \lambda_t^{t-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ f(v) \\ f^2(v) \\ \vdots \\ f^{t-1}(v) \end{bmatrix}$$

حال چون می‌دانیم که ماتریس سمت چپ وارون‌پذیر است، بنابراین داریم :

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_t \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} v \\ f(v) \\ f^2(v) \\ \vdots \\ f^{t-1}(v) \end{bmatrix} \tag{۶}$$

از آن‌جایی که هر $f^i(v) \in W$ است، پس طبق ۶ نتیجه می‌شود که w_j ها ترکیب خطی از $v, f(v), \ldots, f^{t-1}(v)$ است. پس تمام w_j ها در W اند و حکم اثبات می‌شود.