پاسخنامه‌ی میان‌ترم جبر خطی۱
سری اول

سوال اول

$\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ را پایه‌ای برای U و $\{w_1, w_2, \ldots, w_{n-m}\}$ را پایه‌ای برای W بگیرید. پس $\{u_1, u_2, \ldots, u_m, w_1, u_2, \ldots, u_{n-m}\}$ یک پایه برای V است. حال اگر E یک زیر فضای k بعدی باشد، چون $E \subseteq V$ است، پس $E \subseteq span(u_1, u_2, \ldots, u_m, w_1, u_2, \ldots, u_{n-m})$ است. پس از نتیجه می‌شود که $dim(E) \leq dim(V)$ و بنابراین $2dim(E) - dim(V) \leq dim(E)$ است. فرض کنید $E \cap U = A$ و $E \cap W = B$ در این صورت $A \cap B = \{0\}$ است؛ زیرا اگر $t \in A \cap B$ باشد آن‌گاه :

$$t \in (E \cap U) \to t \in U$$

$$t \in (E \cap V) \to t \in V$$

$$t \in U \cap W \to t = 0$$

همین‌طور داریم که $(E \cap U) + (E \cap W) \subseteq E$ است . پس داریم :

$$(E \cap U) \oplus (E \cap W) \subseteq E \to dim((E \cap U) + (E \cap W)) \leq dim(E)$$

پس نامساوی اول ثابت می‌شود. حال برای نامساوی دوم داریم:

$$dim((E \cap U) \oplus (E \cap W)) = dim(E \cap U) + dim(E \cap W)$$

از طرفی داریم:

$$dim(E \cap U) = dim(E) + dim(U) - dim(U + E) \geq dim(E) + dim(U) - dim(V)$$

که نامساوی آخر از اینکه U, E زیر فضایی از V هستند نتیجه شد. به‌طور مشابه داریم:

$$dim(E \cap W) = dim(E) + dim(W) - dim(W + E) \geq dim(E) + dim(W) - dim(V)$$

حال با توجه به دو رابطه اخیر داریم:

$$\begin{aligned} dim((E \cap U) \oplus (E \cap W)) = dim(E \cap U) + dim(E \cap W) &\geq dim(E) + dim(U) - dim(V) + dim(E) + dim(W) - dim(V) \\ &= 2dim(E) - dim(V) \end{aligned}$$

که تساوی آخر از این‌که $U \oplus W = V$ و $dim(U) + dim(W) = dim(V)$ است، نتیجه شد.
بدین ترتیب نامساوی دوم نیز نتیجه می‌شود و در کل حکم ثابت می‌شود.

سوال دوم

در ابتدا فرض می‌کنیم که $T_1 = T_2S$ است که S یک ماتریس وارون‌پذیر است. آن‌گاه برای هر $v \in V$ خوااهیم داشت:

$$T_1v = T_2Sv = T_2(Sv) \in Im(T_2)$$

و نتیجه می‌شود که $Im(T_1) \subseteq Im(T_2)$ است. از طرفی چون S وارون‌پذیر است، بنابراین با ضرب S^{-1} از سمت راست در رابطه $T_1 = T_2S$ نتیجه می‌شود که $T_2 = T_1S^{-1}$ است و برای هر v دلخواه داریم:

$$T_2v = T_1S^{-1}v = T_1(S^{-1}v) \in Im(T_1)$$

و بنابراین نتیجه می‌شود که $Im(T_2) \subseteq Im(T_1)$ که در نهایت نتیجه می‌شود که $Im(T_1) = Im(T_2)$ و حکم سوال نتیجه می‌شود.
برای طرف دیگر سوال، فرض می‌کنیم که $Im(T_1) = Im(T_2)$ است. اگر $dim(Im(T_1)) = dim(Im(T_2)) = m$ فرض کنیم، آن‌گاه داریم $m \leq n$ است و $v_1, v_2, \ldots, v_{n-m}$ یک پایه برای $null(T_1)$ باشد. حال این بردار ها را به یک پایه برای V گسترش می‌دهیم و آن‌ها را $w_1, w_2, \ldots, w_m$ می‌نامیم و بنابراین $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_{n-m}, w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ پایه‌ای برای V است.
ادعا می‌کنیم که T_1w_i ها مستقل خطی هستند. فرض کنید که این‌گونه نباشد. بنابراین $a_i \in F$ که حداقل یکی از آن‌ها ناصفر است موجود است به‌گونه‌ای که

$$\sum_{i=1}^{m} a_iT_1w_i = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{m} T_1a_iw_i = 0 \rightarrow T_1(\sum_{i=1}^{m} a_iw_i) = 0$$

که یعنی این‌که باید $\sum_{i=1}^{m} a_iw_i \in null(T_1)$ باشد که این با اینکه A یک پایه برای V باشد تناقض دارد. پس T_1w_i ها مستقل خطی هستند.
حال از فرض داریم که $Im(T_1) = Im(T_2)$ است و بنابراین وجود دارد $u_1, \ldots, u_m$ به‌طوری‌که $T_1w_i = T_2u_i$ باشد. ادعا می‌کنیم که $u_1, u_2, \ldots, u_m$ مستقل خطی هستند. فرض کنید که این‌گونه نباشد، بنابراین $b_i \in F$ که حداقل یکی از آن‌ها ناصفر است موجود است به‌گونه‌ای که

$$\sum_{i=1}^{m} b_iu_i = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{m} T_2(b_iu_i) = T_20 = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{m} b_i(T_2u_i) = 0$$

که یعنی این‌که باید T_2u_i ها وابسته خطی باشند که با توجه به این‌که $T_1w_i = T_2u_i$ است و ثابت کردیم T_1w_i مستقل خطی هستند، بنابراین نتیجه می‌شود که T_2u_i هم باید مستقل خطی باشند که تناقضق حاصل می‌شود. پس $u_1, u_2, \ldots, u_m$ مستقل هستند.
حال اگر فرض کنیم که $t_1, t_2, \ldots, t_{n-m}$ یک پایه برای $null(T_2)$ است، آن‌گاه $B = \{t_1, t_2, \ldots, t_{n-m}, u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ یک پایه برای V است.
حال S را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S(v_i) = t_i, S(w_i) = u_i$$

حال چون S یک پایه از V را به یک پایه دیگر از V برده‌است، پس نگاشت خطی وارون‌پذیر است و نیز داریم که $T_1 = T_2S$ است. پس حکم ثابت می‌شود.

سوال سوم

می‌دانیم $rank(T) = 1$ است؛ بنابراین برداری مانند v_1 وجود دارد به‌طوری که پایه‌ای برای $range(T)$ باشد.
حال دو حالت داریم :
۱) اگر $T(v_1) = 0$ باشد، آن‌گاه چون v_1 یک پایه برای $range(T)$ است، بنابراین برای هر $x \in V$ داریم که $T(x) = cv_1$ خواهد بود.
حال برای x دلخواه داریم که :

$$T^2(x) = T(T(x)) = T(cv_1) = cT(v_1) = c * 0 = 0$$

بنابراین در این حالت $T^2 = 0$ است.

۲) اگر $T(v_1) \neq 0$ آن‌گاه پس باید $T(v_1) \in range(T)$ است و بنابراین باید $T(v_1) = \lambda v_1$ باشد که $\lambda \neq 0$ است. از طرفی به راحتی نتیجه می‌شود که $dim(null(T)) = n - 1$ است. پس بردار های $v_2, v_3, \ldots, v_n$ یک پایه برای $null(T)$ می‌تواند باشد. بنابراین $v_1, v_2, \ldots, v_n$ یک پایه برای V است و نیز همگی بردار ویژه برای T هستند. حال چون T یک پایه دارد که از بردار های ویژه T تشکیل شده است؛ بنابراین T قطری‌شدنی است.

سوال چهارم

الف)

در ابتدا ادعا می‌کنیم که اگر $S, T \in L(V)$ باشد، آن‌گاه

$$dim(null(ST)) = dim(null(T)) + dim(range(T) \cap null(S)) \tag{۱}$$

است. برای اثبات این حکم ثابت می‌کنیم که

$$dim(range(T)) = dim(range(ST)) + dim(range(T) \cap null(S)) \tag{۲}$$

برقرار است. اگر که S را به T تحدید کنیم،آن‌گاه با توجه به قضیه اساسی داریم که

$$dim(range(T)) = dim(nullS|_T) + dim(rangeS|_T) \tag{۳}$$

برقرار است. از طرفی می‌دانیم که $nullS|_T = range(T) \cap null(S)$ و $rangeS|_T = rangeST$ پس با جاگذاری در ۳ نتیجه می‌گیریم ۲ برقرار است. حال از طرفی $dim(range(T) = n - dim(null(T))$ و $dim(range(ST)) = n - dim(null(ST))$ است که با جاگذاری در ۲ به ۱ می‌رسیم و ادعا ثابت می‌شود.
حکم را با استقرا بر روی n ثابت می‌کنیم.
برای پایه استقرا یعنی $n = 1$ داریم که اگر در رابطه ۱ قرار دهیم $T = T, S = T$ آن‌گاه $dim(nullT^2) = dim(null(T)) + dim(range(T) \cap null(T))$ است و بنابراین پایه استقرا ثابت می‌شود.
حال فرض کنید که برای n حکم برقرار است و داریم که

$$dim(null(T^n)) = dim(null(T)) + \sum_{i=1}^{n-1} dim(range(T^i) \cap null(T)) \tag{۴}$$

برقرار است . حکم را برای $n + 1$ ثابت می‌کنیم. اگر که در رابطه ۱ قرار دهیم که $T = T^n, S = T$ آن‌گاه نتیجه می‌شود:

$$dim(nullT^{n+1}) = dim(nullT^n) + dim(range(T^n) \cap null(T)) \tag{۵}$$

است. حال اگر ۴ را در رابطه ۵ قرار دهیم، آن‌گاه نتیجه می‌شود:

$$dim(nullT^{n+1}) = dim(null(T)) + \sum_{i=1}^{n} dim(range(T^i) \cap null(T)) \tag{۶}$$

که همان رابطه خواسته شده‌است. پس استقرا ثابت می‌شود.

ب)

اگر در رابطه ۶ قرار دهیم که $dim(null(T)) = n - dim(range(T))$ و $dim(null(T^{n+1})) = n - dim(range(T^{n+1}))$ آن‌گاه نتیجه می‌شود که

$$dim(range(T)) = dim(range(T^{n+1})) + \sum_{i=1}^{n} dim(range(T^i) \cap null(T)) \tag{۷}$$

که همان رابطه خواسته شده است. پس این قسمت هم ثابت می‌شود.

سوال پنجم

اگر $V = W \oplus Z$ باشد، آن‌گاه $W \cap Z = \{0\}$ است. حال $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ را پایه‌ای برای W و $\{z_{k+1}, \dots, z_n\}$ را پایه‌ای برای Z بگیرید. پس $\{w_1, w_2, \dots, w_k, z_{k+1}, \dots, z_n\}$ پایه‌ای برای V است. حال ادعا می‌کنیم که $W^0 \cap Z^0 = \{0\}$ است. اگر $\phi \in W^0 \cap Z^0$ باشد آن‌گاه داریم:

$$\begin{cases} \phi \in W^0 \to \phi(w_i) = 0 \\ \phi \in Z^0 \to \phi(z_i) = 0 \end{cases}$$

بنابراین $\phi = 0$ است زیرا که تمام عناصر پایه را به ۰ می‌فرستد. پس ادعا ثابت می‌شود. ادعا می‌کنیم که $V' = W^0 + Z^0$ است. عنصر $\phi \in V'$ و بردار دلخواه $v \in V$ را در نظر بگیرید. داریم:

$$v = a_1w_1 + a_2w_2 + \dots + a_kw_k + a_{k+1}z_{k+1} + \dots + a_nz_n$$

$$\phi(v) = a_1\phi(w_1) + a_2\phi(w_2) + \dots + a_k\phi(w_k) + a_{k+1}\phi(z_{k+1}) + \dots + a_n\phi(z_n)$$

حال $S \in W^0$ را تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} S(w_i) = 0 \\ S(z_i) = \phi(z_i) \end{cases}$$

و نیز $T \in Z^0$ را تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} T(w_i) = \phi(w_i) \\ T(z_i) = 0 \end{cases}$$

پس داریم :

$$\phi(v) = \underbrace{a_1T(w_1) + a_2T(w_2) + \dots + a_kT(w_k)}_{\in Z^0} + \underbrace{a_{k+1}S(z_{k+1}) + \dots + a_nS(z_n)}_{\in W^0} \to \phi(v) \in Z^0 + W^0$$

پس $V' \subseteq Z^0 + W^0$ است. حال نشان می‌دهیم که $Z^0 + W^0 \subseteq V'$ است. این نیز واضح است؛ زیرا که Z^0, W^0 هر دو زیر فضایی از فضای دوگان هستند و بنابراین جمع آن‌ها همچنان زیر فضایی از فضای دوگان خواهند بود.

. پس در نهایت از موارد اخیر نتیجه می‌شود که $V' = W^0 \oplus Z^0$ است.

برای طرف دیگر داریم که $V' = W^0 \oplus Z^0$ است. از آن نتیجه می‌شود $W^0 \cap Z^0 = \{0\}$ و نیز $V' = W^0 + Z^0$ است. ثابت می‌کنیم که $W^0 \cap Z^0 = \{0\}$ نتیجه می‌دهد که $W \cap Z = \{0\}$ است. با برهان خلف فرض کنید که $k \neq 0$ و $k \in W \cap Z$ است. از آن‌جایی‌که $V' = W^0 \oplus Z^0$ پس به‌ازای هر $\phi \in V'$ دلخواه وجود دارد ϕ_W, ϕ_Z یکتا به‌طوری‌که $\phi_W \in W^0$ و $\phi_Z \in Z^0$ و $\phi = \phi_W + \phi_Z$ و $\phi(k) = \phi_W(k) + \phi_Z(k)$ ؛ زیرا که k هم عضو W است و هم Z. پس به‌ازای تمام تابعک‌های خطی $\phi(k) = 0$ است که تناقض است با اینکه $k \neq 0$ ؛ پس $W \cap Z = \{0\}$ است. حال چون $V' = W^0 \oplus Z^0$ و $W^0 \cap Z^0 = \{0\}$ است، پس :

$$dim(V') = dim(W^0) + dim(Z^0) \to dim(V) = dim(V) - dim(W) + dim(V) - dim(Z) \to dim(V) = dim(W) + dim(Z)$$

پس چون $W \cap Z = \{0\}$ است پس $dim(V) = dim(W + Z)$ نتیجه می‌دهد $V = W + Z$ است. پس داریم $V = W \oplus Z$ و حکم ثابت می‌شود.

سوال ششم

فرض می‌کنیم که ماتریس $n \times n$ باشد. فرض کنید عناصر روی قطر ماتریس به صورت زیر باشد:

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix}$$

این ماتریس را به صورت جمع یک ماتریس بالا مثلثی و یک ماتریس پایین مثلثی می‌نویسیم به‌طوری‌که درایه‌های روی قطر اصلی آن‌ها هیچ کدام‌شان صفر نباشد. به صورت زیر:

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & * \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & \circ & & a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & & & \circ \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & * & & b_n \end{bmatrix}$$

حال اگر که ثابت کنیم درایه های روی قطر این دو ماتریس، همگی ناصفر هستند، ثابت می‌شود که هر دو ماتریس وارون پذیر است.
حال برای مشخص کردن درایه های روی قطر داریم:
حال اگر $d_i = 0$ باشد، قرار می‌دهیم $a_i = 1$ و $b_i = -1$ است و بنابراین $a_i + b_i = 0 = d_i$ و برقرار است. اما اگر $a_i \neq 0$ قرار می‌دهیم $a_i = b_i = \dfrac{d_i}{2}$ و در اینجا بنابراین $a_i \neq 0$ و $b_i \neq 0$ و نیز $a_i + b_i = d_i$ است و در این حالت نیز حکم برقرار است. توجه نمایید که سایر درایه های غیر قطر که بالای قطر است، دقیقا با درایه های بالای قطر ماتریس بالا مثلثی یکسان است و درایه‌های زیر قطر با دقیقا با درایه‌های زیر قطر ماتریس پایین مثلثی یکسان است.