تمرین سری ششم

سوال اول

طبق *spectral theorem* داریم که پایه متعامدی مانند $e_1, e_2, \dots, e_n$ از V شامل بردار ویژه‌های T وجود دارد. فرض کنید که $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه متناظر باشند.
فرض کنید که $v \in V$ است به‌گونه‌ای که $||v|| = 1$ و نیز $||Tv - \lambda v|| < \epsilon$ می‌دانیم که داریم:

$$v = \langle v, e_1\rangle e_1 + \cdots + \langle v, e_n\rangle e_n$$

و بنابراین

$$Tv = \lambda_1 \langle v, e_1\rangle e_1 + \cdots + \lambda_n \langle v, e_n\rangle e_n$$

است. پس داریم:

$$\epsilon^2 > ||Tv - \lambda v||^2 = ||(\lambda_1 - \lambda)\langle v, e_1\rangle e_1 + \cdots + (\lambda_n - \lambda)\langle v, e_n\rangle||^2$$
$$= |\lambda_1 - \lambda|^2 |\langle v, e_1\rangle|^2 + \cdots + |\lambda_n - \lambda|^2 |\langle v, e_n\rangle|^2 \geq (min\{|\lambda_1 - \lambda|^2, \dots, +|\lambda_n - \lambda|^2\})(|\langle v, e_1\rangle|^2 + \cdots + |\langle v, e_n\rangle|^2)$$
$$= (min\{|\lambda_1 - \lambda|^2, \dots, +|\lambda_n - \lambda|^2\})$$

و بنابراین نتیجه می‌شود که $|\lambda_j - \lambda| < \epsilon$ برای برخی از مقادیر j برقرار است و حکم ثابت می‌شود.

سوال دوم

در ابتدا نشان می‌دهیم که اگر $v \in V$ یک بردار ویژه باشد، آن‌گاه مقدار ویژه متناظر با آن برابر با ± 1 است. فرض کنید که $Sv = \lambda v$ است. بنابراین:

$$\langle v, v\rangle = (Sv, Sv) = (\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 \langle v, v\rangle$$

بنابراین $\lambda = \pm 1$ است. بنابراین v بردار ویژه‌ای از S^2 با مقدار وِیژهی $\lambda^2 = 1$ است. بنابراین کافی است نشان دهید S یک مقدار ویژه دارد. داریم که یک فضای برداری حقیقی متناهی البعد یا یک بردار ویژه دارد یا یک زیر فضای دوبعدی پایا.پس فرض کنید که S یک زیر فضای پایا دو بعدی مانند $U \subset R^3$ دارد. چون پایه متعامد مکمل $U^\perp$ یک فضای پایا تحت S است و $R^3 = U \oplus U^\perp$ و نیز $dim(U^\perp) = 1$ است؛ بنابراین هر بردار در $U^\perp$ یک بردار ویژه از S است. پس $U^\perp$ پایا است. حال فرض کنید که $w \in U^\perp$ است. می‌خواهیم نشان دهیم که $Sw \in U^\perp$ است. برای این کار نشان می‌دهیم که برای هر $u \in U$ داریم که $\langle Sw, u\rangle = 0$ است که این از $\langle Sw, u\rangle = \langle w, S^* u\rangle$ نتیجه می‌شود.

سوال سوم

فرض کنید که e_1, e_2, e_3, e_4 پایه‌ی یکا متعامد برای F^4 باشد. فرض کنید $T_1, T_2 \in L(F^4)$ باشد طوری‌که:

$$T_1e_1 = 2e_1 \;, T_1e_2 = 2e_2 \;, T_1e_3 = 5e_3 \;, T_1e_4 = 7e_4 \;, T_2e_1 = 2e_1 \;, T_2e_2 = 5e_2 \;, T_2e_3 = 5e_3 \;, T_2e_4 = 7e_4$$

پس T_1, T_2 هر دو خود الفاگر هستند و ۲ و ۵ و ۷ مقدار ویژه های متناظر هستند. با برهان خلف فرض کنید S یک ایزومتری روی V است به‌طوری‌که $T_1 = S^*T_2S$ باشد. فرض کنید که $v \in V$ باشد که S آن را به e_2 تصویر می‌کند. پس:

$$T_1v = S^*T_2Sv = S^*T_2e_2 = 5S^*e_2 = 5v$$

بنابراین $v \in E(T_1, 5) = span(e_3)$ است. همین‌طور فرض کنید که $w \in V$ برداری باشد که S آن را به e_3 تصویر می‌کند. توجه کنید که v, w مستقل‌خطی‌اند؛ زیرا که e_2, e_3 مستقل خطی هستند. بنابراین:

$$T_1w = S^*T_2Sw = S^*T_2e_3 = 5S^*e_3 = 5w$$

بنابراین $w \in E(T_1, 5) = span(e_3)$ است که تناقض است؛ زیرا که نمی‌توانیم دو بردار مستقل خطی(v, w) در فضای یک بعدی $span(e_3)$ داشته باشیم. بنابراین چنین S ای وجود ندارد.

سوال چهارم

فرض کنید که $S_1, S_2 \in L(V)$ ایزومتریک باشد طوریکه $T_1 = S_1\sqrt{T_1^*T_1}$ و $T_2 = S_2\sqrt{T_2^*T_2}$ باشد و نیز $e_1, e_2, \dots, e_n$ و $f_1, f_2, \dots, f_n$ پایه‌های متعامد V متناظر با T_1 و T_2 (به ترتیب) و متناظر با مقدار تکین های $s_1, s_2, \dots, s_n$ باشد. تعریف کنید $S \in L(V)$ به‌طوری‌که

$$Se_j = f_j$$

برای هر $j = 1, 2, \dots, n$ باشد. از طرفی S یک ایزومتر است و داریم :

$$\sqrt{T_1^*T_1}e_j = s_je_j = S^*(s_jf_j) = S^*\sqrt{T_2^*T_2}f_j = S^*\sqrt{T_2^*T_2}Se_j$$

بنابراین $\sqrt{T_1^*T_1} = S^*\sqrt{T_2^*T_2}S$ است. بنابراین

$$T_1 = S_1\sqrt{T_1^*T_1} = S_1S^*\sqrt{T_2^*T_2}S = S_1S^*S_2^*T_2S$$

است که تساوی آخر از ضرب کردن S_2^* در طرفین تساوی $T_2 = S_2\sqrt{T_2^*T_2}$ حاصل شده است . پس حکم ثابت می‌شود.

سوال پنجم

الف)

داریم که :

$$||Tv||^2 = |s_1\langle v, e_1\rangle|^2 + \cdots + |s_n\langle v, e_n\rangle|^2 = |s_1|^2|\langle e_1\rangle|^2 + \cdots + |s_n|^2|\langle v, e_n\rangle|^2$$
$$\leq |s|^2|\langle v, e_1\rangle|^2 + \cdots + |\langle v, e_n\rangle|^2 = s^2||v||^2$$

برای هر $v \in V$ برقرار است که قسمت آخر از این‌که s یک مقدار تکین مثبت است حاصل شده است. با جذر گرفتن از طرفین عبارت فوق داریم که $||Tv|| \leq s||v||$ برای هر $v \in V$ است. اثبات $||Tv|| \geq \hat{s}||v||$ مشابه انجام می‌شود.

ب)

فرض کنید که v یک بردار ویژه از T متناظر با مقدار ویژه λ باشد که $||v|| = 1$ باشد. بنابراین داریم:

$$|\lambda| = |\lambda|\ ||v|| = ||Tv|| \leq s||v|| = s$$

به‌طور مشابه ثابت می‌شود که $\hat{s} \leq |\lambda|$ است.

ج)

فرض کنید که $v \in V$ است. داریم:

$$||(S+T)v|| \leq ||Sv|| + ||Tv|| \leq s||v|| + t||v||$$

از آن‌جایی که r یک مقدار تکین برای $S+T$ است، می‌توانیم v را به‌صورت یک بردار ویژه متناظر با $\sqrt{(S+T)^*(S+T)}$ نوشت، بنابراین:

$$||(S+T)v||^2 = \langle v, (S+T)^*(S+T)v \rangle = \langle v, r^2 v \rangle = r^2 ||v||^2$$

است. پس داریم:

$$r||v|| = ||(S+T)v|| \leq s||v|| + t||v||$$

است. بنابراین نتیجه می‌شود که $r \leq s+t$ است و حکم ثابت شد.