۱

۱.۱

برای اثبات این قضیه از عکس نقیض استفاده می‌کنیم بنابراین λ مقدار ویژه T نیست اگر و تنها اگر $T-\lambda I$ وارون‌پذیر باشد اگر و تنها اگر وجود داشته باشد S که $S(T-\lambda I)=(T-\lambda I)S=I$ اگر و تنها اگر وجود داشته باشد S^* که $S^*(T-\lambda I)^*=(T-\lambda I)^*S^*=I^*=I$ اگر و تنها اگر $(T-\lambda I)^*$ وارون‌پذیر باشد اگر و تنها اگر $T^*-\bar{\lambda}I$ وارون‌پذیر باشد اگر و تنها اگر $\bar{\lambda}$ مقدار ویژه T^* باشد.

۲.۱

ابتدا ثابت می‌کنیم اگر T تحت U ناوردا است آنگاه $U^\perp$ تحت T^* ناوردا است:

فرض می‌کنیم $u \in U$ بنابر فرض مسئله $Tu \in U$ و هم‌چنین فرض می‌کنیم $w \in U^\perp$ بنابراین طبق تعریف تعامد داریم که:

$0=<Tu,w>=<u,T^*w>$

با توجه به برقرار بودن رابطه فوق برای تمام uها در U داریم T^*w بر U عمود است بنابراین $T^*w \in U^\perp$ پس حکم ثابت می‌شود و $U^\perp$ تحت T^* ناوردا است.

برای عکس قضیه فوق از قسمت قبل داریم که اگر $U^\perp$ تحت T^* ناوردا باشد آنگاه $(U^\perp)^\perp$ تحت $(T^*)^*$ ناوردا است حال از 6.51 داریم که $U=(U^\perp)^\perp$ و از 7.6 داریم که $T=(T^*)^*$ بنابراین با جای‌گذاری در عبارت قبل حکم ثابت می‌شود.

۳.۱

T یک‌به‌یک است اگر و تنها اگر $null(T)=\{0\}$ اگر و تنها اگر (طبق 7.7) $(rangeT^*)^\perp=\{0\}$ اگر و تنها اگر (طبق 6.46) $rangeT^*=V$ اگر و تنها اگر T^* پوشا باشد.

۴.۱

از قضیه اساسی نگاشت‌های خطی داریم:

$dim\ range\ T + dim\ null\ T = dim\ V \overset{7.7}{\Leftrightarrow} dim(null\ T^*)^\perp + dim\ null\ T = dim\ V \overset{6.50}{\Leftrightarrow} dim\ W - dim\ null\ T^* + dim\ null\ T = dim\ V \Leftrightarrow dim\ null\ T^* = dim\ null\ T + dim\ W - dim\ V (*)$

$dim\ range\ T^* \overset{7.7}{=} dim(null\ T^*)^\perp \overset{6.50}{=} dim\ W - dim\ null\ T^* \overset{(*)}{=} dim\ W - (dim\ null\ T + dim\ W - dim\ V) = dim\ V - dim\ null\ T = dim\ range\ T$

۵.۱

می‌دانیم اگر T نرمال باشد $null\ T = null\ T^*$ پس داریم:

$range\ T^* = (null\ T)^\perp = (null\ T^*)^\perp = range\ T$

۶.۱

ابتدا به کمک استقرا نشان می‌دهیم $null\ T^k \subseteq null\ T$:
حکم برای $k=1$ به وضوح برقرار است فرض کنید حکم برای $k-1$ برقرار باشد در این صورت بردار دلخواه $v \in null\ T^k$ را در نظر بگیرید داریم:

$$||T^*T^{k-1}v||^2 =< T^*T^{k-1}v, T^*T^{k-1}v >=< TT^*T^{k-1}v, T^{k-1}v >= \\ < T^*T^kv, T^{k-1}v >=< T^*(0), T^{k-1}v >=< 0, T^{k-1}v >= 0 \Rightarrow T^*T^{k-1}v = 0(*) \\ ||T^{k-1}v||^2 =< T^{k-1}v, T^{k-1}v >=< T^{k-2}v, T^*T^{k-1}v > \overset{(*)}{=} < T^{k-2}v, 0 >= 0 \Rightarrow \\ T^{k-1}v = 0$$

بنابراین v عضو $null\ T^{k-1}$ و طبق فرض استقرا عضو $null\ T$ است پس داریم $null\ T^k \subseteq null\ T$.
از طرفی فرض کنید $v \in null\ T$ داریم:

$$Tv = 0 \Rightarrow T^kv = T^{k-1}(Tv) = T^{k-1}(0) = 0 \Rightarrow v \in null\ T^k \Rightarrow \\ null\ T \subseteq null\ T^k \Rightarrow null\ T = null\ T^k$$

اکنون فرض کنید $v \in range\ T^k$ یعنی وجود دارد $u \in V$ که $T^ku = v$ داریم $v = T^ku = T(T^{k-1}u)$ پس $v \in range\ T$ در نتیجه $range\ T^k \subseteq range\ T(**)$. از طرفی داریم:

$$dim\ range\ T^k = dim\ V - dim\ null\ T^k = dim\ V - dim\ null\ T = dim\ range\ T \overset{(**)}{\Rightarrow} \\ range\ T^k = range\ T$$

۲

۱.۲

فرض کنید وجود دارد $g \in C_R[-1,1]$ که $\varphi(f) = \langle f, g\rangle$ برای $f \in C_R[-1,1]$ برای هر عدد طبیعی n و عدد صحیح $-n \le i \le n$ تعریف کنید:

$$f_{n,i}(x) = \begin{cases} 4n^2(x - i/n), & x \in [i/n, i/n + 1/(2n)] \\ 4n^2((i+1)/n - x), & x \in [i/n + 1/(2n), (i+1)/n] \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

آنگاه $f_{n,i}(x) \in C_R[-1,1]$ و $f_{n.i}(0) = 0$.برای هر $\epsilon > 0$ از آنجایی که $g \in C_R[-1,1]$ وجود دارد N که برای هر $n \ge N$ داریم $|g(x) - g(y)| \le \epsilon$ اگر $|x-y| \le 1/n$.
برای هر $y \in [i/n, (i+1)/n]$ داریم:

$$|g(y) - \int_{-1}^{1} f_{n,i}(x)g(x)dx| = |\int_{i/n}^{(i+1)/n} f_{n,i}(x)(g(y) - g(x))dx| \le \\ \int_{i/n}^{(i+1)/n} f_{n,i}(x)|g(y) - g(x)|dx \le \int_{i/n}^{(i+1)/n} f_{n,i}(x)\epsilon dx = \epsilon$$

از طرف دیگر هم‌چنین داریم: $0 = f_{n,i}(0) = \varphi(f_{n,i}) = \langle f_{n,i}, g\rangle = \int_{-1}^{1} f_{n,i}(x)g(x)dx$

پس داریم $|g(y)| = |g(y) - f_{n,i}(0)| \leq \epsilon$ برای هر $y \in [i/n, (i+1)/n]$ پس $g(x) \leq \epsilon$ با گرفتن همه $-n \leq i \leq n$ که $n \geq N$. از آنجایی که ϵ دلخواه انتخاب شد داریم $g(x) = 0$ پس $\varphi f = 0$ برای هر $f \in C_R[-1,1]$ که غیرممکن است پس به تناقض رسیدیم پس چنین gای وجود ندارد.

۲.۲

۱.۲.۲

فرض کنید $\varphi \in U^\perp$ طبق پیوستگی باید ثابت کنیم $\varphi(x) = 0$ برای هر $x \in (-1,0) \cup (0,1)$. فرض کنید $\varphi(x_0) = \xi \neq 0$ برای یک $x_0 \in (-1,0) \cup (0,1)$ آنگاه وجود دارد $\delta > 0$ که $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (-1,0) \cup (0,1)$ و $\varphi(x) \geq \xi/2$ برای هر $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. تعریف کنید $f \in C_R[-1,1]$ را:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1, x_0 - \delta] \cup [x_0 + \delta, 1] \\ (x - x_0 + \delta)/\delta, & x \in [x_0 - \delta, x_0] \\ (-x + x_0 + \delta)/\delta, & x \in [x_0, x_0 + \delta] \end{cases}$$

آنگاه $f \in U$ و $f(x) \geq 1/2$ برای هر $x \in [x_0 - \delta/2, x_0 + \delta/2]$. پس:

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\varphi(x)dx \geq \int_{x_0-\delta/2}^{x_0+\delta/2} f(x)\varphi(x)dx \geq \delta\xi/4 > 0$$

که تناقض است پس حکم ثابت می‌شود.

۲.۲.۲

از U به عنوان مثال استفاده کنید.

۳

ϕ برای هر $v_1, v_2 \in V$ و $\alpha, \beta \in R$ داریم:

$$\phi_u(\alpha v_1 + \beta v_2) = \langle \alpha v_1 + \beta v_2, u \rangle = \langle \overline{u, \alpha v_1 + \beta v_2} \rangle = \langle \overline{u, \alpha v_1} \rangle + \langle \overline{u, \beta v_2} \rangle = \overline{\alpha}\langle \overline{u, v_1} \rangle + \overline{\beta}\langle \overline{u, v_2} \rangle \overset{\alpha,\beta \in R}{=} \alpha\langle v_1, u \rangle + \beta\langle v_2, u \rangle = \alpha\phi_u(v_1) + \beta\phi_u(v_2)$$

پس ϕ یک نگاشت خطی از V به $L(V,R)$ است.هم‌چنین داریم:

$$\phi_u(v_1) = \phi_u(v_2) \Rightarrow \langle v_1, u \rangle = \langle v_2, u \rangle \Rightarrow \langle v_1, u \rangle - \langle v_2, u \rangle = 0 \Rightarrow \langle v_1 - v_2, u - u \rangle = 0 \Rightarrow \langle v_1 - v_2, 0 \rangle = 0 \Rightarrow v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2$$

پس ϕ یک‌به‌یک است پس ϕ یک یکریختی از V به $L(V,R)$ است.

۴

۱.۴

فرض کنید منظور از v^j مولفه jام بردار v در پایه استاندارد باشد حال با توجه به این که $v-i$ها یک پایه متعامد و یکه هستند اگر $M = Q^TQ$ ماتریس $m \times m$ حاصل باشد داریم:

$$M_{ij} = \sum_{k=1}^{m} Q^T_{ik}Q_{kj} = \sum_{k=1}^{m} v_i^k v_j^k = \langle v_i, v_j\rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

پس $Q^TQ = I_m$. حال فرض کنید v برداری دلخواه باشد اگر $Q^Tv = u$ داریم:

$$(Q^Tv)^i = u^i = \sum_{k=1}^{n} Q^T_{ik}v^k = \langle v_i, v\rangle$$

حال داریم:

$$(QQ^Tv)^i = (Qu)^i = \sum_{k=1}^{m} Q_{ik}u^k = v_k^i u^i = v_k^i \langle v_i, v\rangle$$

پس:

$$QQ^Tv = (Qu)^i = \sum_{k=1}^{m} v_k \langle v_i, v\rangle$$

که چون v_iها متعامد و یکه هستند همان تصویر عمود است.

۲.۴

کافی است u_i را در پایه v_iها نمایش دهیم و قرار دهیم $u_j = \sum_{k=1}^{m} R_{kj}v_k$ در این صورت:

$$(QR)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} Q_{ik}R_{kj} = \sum_{k=1}^{m} v_k^i R_{kj} = \sum_{k=1}^{m} u_j^i$$

که همان ماتریس A می‌شود. R وارون‌پذیر است زیرا اگر $Rx = 0$ در این صورت $Ax = QRx = 0$ پس $x = 0$.

۳.۴

با استفاده از بخش قبل مقدار A را جایگذاری می‌کنیم:

$$A(A^TA)^{-1}A^T = (QR)((QR)^T(QR))^{-1}(QR)^T = QR(R^TQ^TQR)^{-1}R^TQ^T = QR(R^TR)^{-1}R^TQ^T = QRR^{-1}(R^T)^{-1}R^TQ^T = QQ^T$$

که با توجه به قسمت اول همان تصویر عمود است.دقت کنید که QQ^T را با استفاده از بخش اول حذف کردیم و در $(R^TR)^{-1} = R^{-1}(R^T)^{-1}$ از وارون‌پذیری R, R^T استفاده کردیم.

۵

۱.۵

قرار دهید $e_j = \dfrac{cos\ jx}{\sqrt{\pi}}, f_j = \dfrac{sin\ jx}{\sqrt{\pi}}$. طبق تمرین 4 بخش $6B$ داریم یک پایه متعامد یکه برای V $\{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}, e_1, ..., e_n, f_1, ..., f_n\}$ است. توجه کنید $De_j = -jf_j$ و $Df_j = je_j$ پس برای هر $v, w \in V$ داریم:

$$\langle v, D^*w\rangle = \langle Dv, w\rangle =$$
$$\Big\langle D\Big(\langle v, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\rangle\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{j=1}^{n}\big(\langle v, e_j\rangle e_j + \langle v, f_j\rangle f_j\big)\Big), w\Big\rangle =$$
$$\Big\langle \sum_{j=1}^{n}\big(-j\langle v, e_j\rangle f_j + j\langle v, f_j\rangle e_j\big), \langle w, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\rangle\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{j=1}^{n}\big(\langle w, e_j\rangle e_j + \langle w, f_j\rangle f_j\big)\Big\rangle =$$
$$\sum_{j=1}^{n}\big(-j\langle v, e_j\rangle\langle w, f_j\rangle + j\langle v, f_j\rangle\langle w, e_j\rangle\big) =$$
$$\Big\langle \langle v, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\rangle\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{j=1}^{n}\big(\langle v, e_j\rangle e_j + \langle v, f_j\rangle f_j\big), \sum_{j=1}^{n}\big(-j\langle w, e_j\rangle f_j + j\langle w, f_j\rangle e_j\big)\Big\rangle =$$
$$\langle v, -Dw\rangle \Rightarrow D^* = -D$$

۲.۵

$$T = D^2 \Rightarrow T^* = (DD)^* = D^*D^* = (-D)(-D) = D^2 = T$$