سوال 1

۱. فرض کنید $T \in L(V)$ و $\lambda \in F$.ثابت کنید λ مقدار ویژه T است اگر و فقط اگر $\bar{\lambda}$ مقدار ویژه T^* باشد.

۲. فرض کنید $T \in L(V)$ و U زیرفضایی از V باشد. ثابت کنید U تحت T پایا است اگر و فقط اگر $U^\perp$ تحت T^* پایا باشد.

۳. فرض کنید $T \in L(V, W)$. ثابت کنید T یک به یک است اگر و تنها اگر T^* پوشا باشد.

۴. فرض کنید $T \in L(V, W)$. ثابت کنید $dim\ null\ T^* = dim\ null\ T + dim\ W - dim\ V$ و $dim\ range\ T^* = dim\ range\ T$.

۵. فرض کنید $T \in L(V)$ نرمال باشد. ثابت کنید $range\ T = range\ T^*$.

۶. فرض کنید $T \in L(V)$ نرمال باشد. ثابت کنید $null\ T^k = null\ T$ و $range\ T^k = range\ T$ برای هر عدد طبیعی k.

سوال 2

فرض کنید $C_R([-1,1])$ فضای برداری توابع حقیقی پیوسته روی بازه $[-1,1]$ با ضرب داخلی $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ برای $f,g \in C_R([-1,1])$ باشد.

الف) فرض کنید φ یک تابعک خطی روی $C_R([-1,1])$ باشد که $\varphi(f) = f(0)$. نشان دهید وجود ندارد $g \in C_R([-1,1])$ که $\varphi(f) = \langle f,g\rangle$ برای هر $f \in C_R([-1,1])$.

ب) فرض کنید U زیرفضایی از $C_R([-1,1])$ باشد که $U = \{f \in C_R([-1,1]) : f(0) = 0\}$.

۱. نشان دهید $U^{\perp} = \{0\}$.
۲. نشان دهید قضایای 6.47 و 6.51 کتاب بدون فرض بعد متناهی برقرار نیستند.

سوال 3

فرض کنید V یک فضای برداری روی R و از بعد متناهی باشد. برای $u \in V$ تابعک خطی ϕ_u روی V را تعریف کنید $\phi_u(v) = \langle v, u \rangle$ برای هر $v \in V$. نشان دهید ϕ یک یکریختی از V به $L(V, R)$ است.

سوال 4

فضای برداری R^n با ضرب داخلی و پایه استاندارد را در نظر بگیرید. فرض کنید V یک زیرفضای mبعدی از آن با پایه متعامد و یکه $v_1, \dots, v_m$ باشد.

۱. اگر Q ماتریسی باشد که ستون‌های آن $v_1, \dots, v_m$ است ثابت کنید $Q^T Q = I_m$ و QQ^T تصویر عمود روی V است.
۲. فرض کنید $u_1, \dots, u_m$ یک پایه دلخواه برای V باشد. اگر A ماتریسی با ستون‌های $u_1, \dots, u_m$ باشد ثابت کنید $A = QR$ که R یک ماتریس وارون‌پذیر است.
۳. ثابت کنید $A(A^T A)^{-1} A^T$ عملگر تصویر عمود روی V است.

سوال 5

فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد. در فضای ضرب داخلی توابع حقیقی روی $[-\pi,\pi]$ با ضرب داخلی $\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$ قرار دهید:

$$V = span(1, cos\ x, cos\ 2x, ..., cos\ nx, sin\ x, sin\ 2x, ..., sin\ nx)$$

۱. تعریف کنید $D \in L(V) : Df = f'$. نشان دهید $D^* = -D$.

۲. تعریف کنید $T \in L(V) : Tf = f''$. نشان دهید T خودالحاق است.