تمرین سری چهارم

سوال اول

ابتدا ثابت می‌کنیم که به‌ازای هر i $(1 \leq i \leq m)$ داریم که $E(\lambda_i, T) \subseteq range(T)$ است:

$$\forall v \in E(\lambda_i, T) : T(v) = \lambda_i v \to T(\frac{1}{\lambda_i} v) = v \to v \in range(T) \to E(\lambda_i, T) \subseteq range(T)$$

طبق قضیه‌ی ۳۸.۵ کتاب می‌دانیم که :

$$dim(E(\lambda_1, T) + E(\lambda_2, T) + \cdots + E(\lambda_m, T)) = dim(E(\lambda_1, T) \oplus E(\lambda_2, T) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_m, T))$$

حال چون به ازای هر i داریم که $E(\lambda_i, T) \subseteq range(T)$ و نیز برای هر i, j که $i \neq j$ داریم که $E(\lambda_i, T) \cap E(\lambda_j, T) = \{0\}$ است(زیرا که جمع زیر فضا ها، طبق قضیه ۳۸.۵ جمع مستقیم است).
پس :

$$E(\lambda_1, T) \oplus E(\lambda_2, T) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_m, T) \subseteq rangeT$$

و بنابراین نتیجه می‌شود که

$$dim(E(\lambda_1, T) \oplus E(\lambda_2, T) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_m, T)) \leq dim(range(T))$$

و حکم ثابت می‌شود.

سوال دوم

الف)

ابتدا ثابت می‌کنیم که $< A, A > \geq 0$ و $< A, A >= 0$ اگر و تنها اگر $A = 0$ باشد:

$$< A, A >= tr(A^T A) = \sum_{i=1}^{n} (A^T A)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{m} A^T_{i,j} * A_{j,i}) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{m} A_{j,i} * A_{j,i}) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} A^2_{j,i}$$

از آن‌جایی که عبارت فوق حاصل جمع تعدادی مقدار نامنفی(مربع کامل) است، بنابراین همواره نامنفی است و صفر است اگر و تنها اگر تمامی مقادیر برابر با صفر باشند که یعنی $A = 0$ باشد.
حال ثابت می‌کنیم که این عملیات نسبت به مولفه‌ی اول جمع‌پذیری دارد:

$$< A_1 + A_2, B >= tr(B^T (A_1 + A_2)) = tr(B^T A_1 + B^T A_2) = tr(B^T A_1) + tr(B^T A_2) =< A_1 B > + < A_2 B >$$

حال همگن بودن نسبت به مولفه‌ی اول را اثبات می‌کنیم :

$$< \lambda A, B >= tr(B^T (\lambda A)) = tr(\lambda (B^T A)) = \lambda \, tr(B^T A) = \lambda < A, B >$$

و اکنون تقارن مزدوج مختلط را بررسی می‌کنیم. چون میدان ما اعداد حقیقی است، کافی است که ثابت کنیم که $< A, B >=< B, A >$ برقرار است:

$$< A, B >= tr(B^T A) = \sum_{i=1}^{n}(B^T A)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{m} B^T_{i,j} * A_{j,i}) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{m} B_{j,i} * A_{j,i}) = \sum_{i=1}^{n}(A^T B)_{i,i} = tr(A^T B) =< B, A >$$

و بنابراین حکم ثابت می‌شود.

ب)

ابتدا ثابت می‌کنیم که $< f|f > \geq 0$ و $< f|f >= 0$ اگر و تنها اگر $f = 0$ باشد:

$$< f|f >= \int_0^1 f(x)f^*(x)dx = \int_0^1 |f(x)|^2 dx \geq 0$$

و می‌دانیم که حاصل انتگرال زمانی برابر با صفر است که $f = 0$ باشد و این قسمت ثابت می‌شود.
حال ثابت می‌کنیم که این عملیات نسبت به مولفه اول جمع‌پذیری دارد:

$$< f_1 + f_2|g >= \int_0^1 (f_1 + f_2)(x)g^*(x)dx = \int_0^1 (f_1(x)g^*(x) + f_2(x)g^*(x))dx$$
$$= \int_0^1 f_1(x)g^*(x) + \int_0^1 f_2(x)g^*(x))dx =< f_1, g > + < f_2, g >$$

حال همگن بودن نسبت به مولفه اول را ثابت می‌کنیم:

$$< \lambda f, g >= \int_0^1 (\lambda f)(x)g^*(x)dx = \int_0^1 \lambda f(x)g^*(x)dx = \lambda \int_0^1 f(x)g^*(x)dx = \lambda < f, g >$$

و در نهایت تقارن مزدوج را بررسی می‌کنیم:

$$< g, f >= \int_0^1 g(x)f^*(x)dx = \int_0^1 \overline{f(x)g^*(x)}dx = \overline{\int_0^1 f(x)g^*(x)dx} = \overline{< f, g >}$$

و بنابراین حکم ثابت می‌شود.

سوال سوم

۱)

با استفاده از استقرا حکم را ثابت می‌کنیم. توجه کنید که داریم:

$$T(0, 1) = (1, 1) = (F_1, F_2)$$

و بنابراین پایه استقرا برقرار است. حال فرض کنید که $T^n(0, 1) = (F_n, F_{n+1})$ را داریم. داریم:

$$T^{n+1}(0, 1) = T(T^n(0, 1)) = T(F_n, F_{n+1}) = (F_{n+1}, F_n + F_{n+1}) = (F_{n+1}, F_{n+2})$$

و بنابراین حکم استقرا ثابت می‌شود.

۲،۳)

باید

$$T(x,y)=\lambda(x,y)$$

که $(x,y)\neq(0,0)$ و $\lambda\in\mathbf{R}$ است.طبق تعریف داریم که :

$$\lambda x=y,\lambda y=x+y$$

حال اگر $y=0$ آن‌گاه $x=0$ است. اگر $y\neq 0$ باشد، آن‌گاه $x\neq 0$ و $\lambda\neq 0$ است. از رابطه اول نتیجه می‌شود که $x/y=1/\lambda$ و از رابطه دوم داریم که $\lambda=x/y+1$ است. بنابراین نتیجه می‌شود که

$$\lambda=\frac{1}{\lambda}+1$$

که جواب‌های آن برابر با

$$\lambda=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

است و بردار ویژه‌های متناظر با آن برابر با $(1,\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2})$ است.

۴)

اگر که $(1,\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})$ و $(1,\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})$ را به ترتیب e_1,e_2 بنامیم، آن‌گاه داریم:

$$(0,1)=\frac{1}{\sqrt{5}}(e_1-e_2)$$

و بنابراین نتیجه می‌شود:

$$T^n(0,1)=T^n(\frac{1}{\sqrt{5}}(e_1-e_2))=\frac{1}{\sqrt{5}}(T^ne_1-T^ne_2)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(1,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n e_1-\left(1,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n e_2\right]$$

حال با استفاده از قسمت اول سوال، می‌توانیم نتیجه بگیریم که:

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

و ثابت می‌شود.

۵

از آن‌جایی که $\sqrt{5}\geq 2$ است، بنابراین داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|^n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left|\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right|^n\leq\frac{1}{2}*\frac{2}{3}<\frac{1}{2}$$

به علاوه به سادگی با استفاده از استقرا می‌توان نشان داد که $F_n\in\mathbf{Z}$ است. حال با استفاده از نتیجه قسمت قبل و نامساوی اخیر داریم:

$$\left|\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n-F_n\right|=\frac{1}{\sqrt{5}}\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|^n<\frac{1}{2}$$

و از آن‌جایی که $F_n\in\mathbf{Z}$ است، بنابراین این مقدار برابر با نزدیک‌ترین عدد صحیح به عدد $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ می‌باشد.

سوال چهارم

از آن‌جایی که فضای $M_n(\mathbf{C})$ متناهی‌البعد است، بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که S دارای بعد متناهی است. حال با استفاده از استقرا حکم را ثابت می‌کنیم. برای پایه استقرا، اگر که S تنها یک عضو داشته باشد، به‌وضوح حکم برقرار است. حال فرض کنید که اگر S دارای m عضو باشد، آن‌گاه دارای بردار ویژه یکسانی هستند. حال فرض کنید S دارای $n+1$ عضو $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ باشد. طبق فرض استقرا، ماتریس های $A_1, A_2, \ldots, A_n$ دارای بردار ویژه یکسانی مانند v هستند. مجموعه E را فضای برداری حاصل از $span$ بردار ویژه‌های مشترک $A_1, \ldots, A_n$ بنامید. اگر $v \in E$ را در نظر بگیریم، آن‌گاه برای هر i داریم که:

$$A_i A_{n+1} v = A_{n+1} A_i v = A_{n+1}(A_i v) = \lambda_i A_{n+1} v$$

و بنابراین نتیجه می‌شود که $A_{n+1} v \in E$ خواهد بود. بنابراین A_{n+1} را ثابت نگه می‌دارد. حال B را تحدید A_{n+1} به E در نظر بگیرید. چندجمله‌ای مینیمال B به فاکتور های خطی تبدیل می‌کند؛ بنابراین B بردار ویژه‌ای در E دارد و بنابر تعریف B باید بردار ویژه‌ای برای A_{n+1} باشد. طبق تعریف E پس این بردار ویژه، یک بردار ویژه برای تمام $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ است و استقرا ثابت می‌شود.

سوال پنجم

الف) برای هر $v \in V$ وجود دارد a_v به‌طوری که $Tv = a_v v$ برقرار باشد. از آن‌جایی که $T0 = 0$ است، بنابراین a_0 را می‌توانیم هر عضو دلخواه در F در نظر بگیریم ولی برای هر $v \in V - \{0\}$ مقدار a_v به‌طور یکتا مشخص خواهد شد.
برای اینکه نشان دهیم که T برابر با حاصلضرب یک اسکالر در عملگر همانی است، باید نشان دهیم که برای هر $v \in V - \{0\}$ داریم که a_v مستقل از v است.
دو عضو دلخواه $v, w \in V - \{0\}$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم نشان دهیم که $a_v = a_w$ است. در ابتدا فرض کنید که (v, w) وابسته‌خطی هستند. بنابراین وجود دارد $b \in F$ به‌طوری‌که $w = bv$ است. حال داریم:

$$a_w w = Tw = T(bv) = bTv = b(a_v v) = a_v w \to a_w = a_v$$

و در این حالت حکم ثابت می‌شود.
حال فرض کنید که (v, w) مستقل خطی هستند. داریم:

$$a_{v+w}(v+w) = T(v+w) = Tv + Tw = a_v v + a_w w \to (a_{v+w} - a_v)v + (a_{v+w} - a_w)w = 0$$

و چون (v, w) مستقل خطی هستند، بنابراین باید $a_{v+w} = a_v$ و $a_{v+w} = a_w$ برقرار باشد که نتیجه می‌دهد که $a_w = a_{v+w} = a_v$ است و حکم ثابت می‌شود.
ب) فرض کنید که $\lambda \in F$ یک مقدار ویژه برای ST است. می‌خواهیم نشان دهیم که λ یک مقدار ویژه برای TS نیز است.
از آن‌جایی که λ یک مقدار ویژه برای ST است، بنابراین بردار ناصفر $v \in V$ وجود دارد به‌طوری‌که $(ST)v = \lambda v$ است. حال داریم:

$$(TS)(Tv) = T(ST)v = T(STv) = T(\lambda v) = \lambda T v$$

حال اگر $Tv \neq 0$ باشد، آن‌گاه نتیجه می‌شود که λ یک مقدار ویژه برای TS است و حکم ثابت می‌شود. اما اگر $Tv = 0$ باشد، آن‌گاه داریم

$$(ST)v = S(Tv) = \lambda v \ , \ S(Tv) = S0 = 0 \to \lambda = 0$$

و بنابراین در این حالت نتیجه می‌شود که $\lambda = 0$ است. بنابراین T وارون ناپذیر است و این نیز نتیجه می‌دهد که ST وارون ناپذیر است. حال طبق قضیه‌ای می‌دانیم که اگر ST وارون ناپذیر باشد، آن‌گاه TS نیز وارون ناپذیر خواهد بود و بنابراین مقدار ویژه $\lambda = 0$ خواهد داشت. پس حکم ثابت می‌شود.
بنابر تقارن، مشابها ثابت می‌شود که هر مقدار ویژه TS مقدار ویژه‌ای برای ST نیز است و بنابراین حکم سوال ثابت می‌شود.