

سوال ۱

فرض کنید V یک فضای برداری متناهی البعد باشد و $T \in L(V)$ باشد. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ را مقادیر ویژه متمایز و ناصفر T در نظر بگیرید. نشان دهید:

$$\dim E(\lambda_1, T) + \dots + \dim E(\lambda_m, T) \leq \dim \text{range } T$$

سوال ۲

۱. فرض کنید $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ باشد. نشان دهید $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T A)$ ضرب داخلی است.
۲. فرض کنید f, g دو تابع پیوسته در بازه $[0, 1]$ باشند. نشان دهید

$$\langle f|g \rangle = \int_0^1 f^*(x)g(x)dx$$

ضرب داخلی است.

سوال 3

دنباله فیبوناچی F_1, F_2, \dots به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ for } n \geq 3$$

تعریف کنید $T \in L(R^2)$ به صورت $T(x, y) = (y, x + y)$

۱. نشان دهید $T^n(0, 1) = (F_n, F_{n+1})$ برای هر عدد طبیعی n

۲. مقادیر ویژه T را بیابید.

۳. یک پایه برای R^2 شامل بردار ویژه‌های T بیابید.

۴. از پاسخ قسمت قبل، برای محاسبه $T^n(0, 1)$ استفاده نمایید و سپس نتیجه بگیرید برای هر عدد طبیعی

n :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

۵. با استفاده قسمت قبل، نتیجه بگیرید که برای هر عدد طبیعی n ، جمله n ام فیبوناچی (F_n) برابر با

نزدیک‌ترین عدد صحیح به

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

است.

سوال 4

فرض کنید S مجموعه ناتهی از ماتریس‌های مختلط $n \times n$ باشد ($n \geq 1$) که ماتریس‌های آن خاصیت جابه‌جایی دارند (یعنی برای هر دو ماتریس دلخواه $A, B \in S$ خاصیت $AB = BA$ برقرار است). ثابت کنید اعضای S بردار ویژه‌ی مشترکی دارند.

سوال 5

۱. فرض کنید $T \in L(V)$ به طوری که هر بردار در V یک بردار ویژه از T است. ثابت کنید که T حاصل ضرب یک اسکالر در عملگر همانی است.
۲. فرض کنید $S, T \in L(V)$ برقرار باشد. ثابت کنید که TS و ST مقادیر ویژه یکسانی دارند.