پاسخ تمرین سری سوم

پاسخ سوال اول

Y را اشتراک این زیر فضا ها در نظر بگیرید. بنابر این Y زیر فضایی از V است و داشتیم که $W \subset V$ است. فرض کنید که بردار ناصفری مانند u وجود دارد به‌طوری‌که $u \in Y/W$ برقرار است. بنابر این چون u در W قرار ندارد، پس پایه‌ای برای W و u یک مجموعه مستقل خطی تشکیل می‌دهند. این مجموعه را به یک پایه برای V گسترش دهید. از این پایه‌ی گسترش یافته برای V عضو u را حذف کنید و Z را زیر فضای $n-1$ بعدیِ $span$ آن فرض کنید. حال واضح است که $W \subset Z$ برقرار است. پس Z پس Z از مجموعه‌هایی است که در اشتراک لحاظ می‌شود و بنابر این در تعریف Y لحاظ می‌شود. حال چون $v \notin Z$ پس $v \notin Y$ باید برقرار باشد که تناقض است. پس $W \subseteq Y$ است و چون $Y \subseteq W$ حکم ثابت می‌شود.

پاسخ سوال دوم

با توجه به تساوی داریم که:

$$A^2 = A \to A - A^2 = 0 \to A(I-A) = 0$$

حال فرض کنید $y \in img(I-A)$ باشد. پس وجود دارد x به‌طوری که $y = (A-I)x$ شود. پس با ضرب کردن x در رابطه‌ی فوق داریم:

$$A(A-I)x = 0 \to Ay = 0 \to y \in ker(A)$$

پس نتیجه می‌شود که $img(A-I) \subseteq ker(A)$ است. حال فرض کنید که $x \in ker(A)$ است. پس یعنی $Ax = 0$ است. پس داریم که :

$$Ax = 0 \to Ax - x = -x \to (A-I)x = -x \to (I-A)x = x \to x \in img(I-A)$$

پس $ker(A) \subseteq img(A-I)$ است. پس $img(I-A) = img(A-I) = ker(A)$ و بنابر این $rank(A-I) = null(A)$
حال با توجه قضیه رنک_پوچی داریم: $rank(A) + null(A) = n$ است. با جاگذاری $rank(A-I) = null(A)$ در رابطه اخیر، حکم سوال نتیجه می‌شود.

پاسخ سوال سوم

الف)
از آن‌جایی که V/U متناهی البعد است، پس $n = dim(V/U)$ در نظر بگیرید. پس وجود دارد $w_1, w_2, \ldots, w_n \in V$ به‌طوری که $w_1 + U, \ldots, w_n + U$ یک پایه برای V/U باشد. به‌سادگی می‌توان مشاهده کرد که $w_1, w_2, \ldots, w_n$ مستقل خطی‌اند زیرا در غیر این‌صورت $w_1 + U, \ldots, w_n + U$ وابسته خطی خواهد بود. زیر فضای W از V بگیرید به‌طوری که $W = span\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ باشد. پس بنابراین داریم که $dimW = n = dim(V/U)$ است.
حال می‌خواهیم نشان‌دهیم که $V = U \bigoplus W$ است. چون $w_1 + U, \ldots, w_n + U$ یک پایه برای V/U است، پس برای هر $v \in V$ وجود دارد $k_1 \ldots, k_n \in F$ به‌طوری که

$$v + U = \sum_{i=1}^{n} k_i(w_i + U)$$

که نتیجه می‌دهد که

$$v-\sum_{i=1}^{n}k_iw_i\in U.$$

بنابر این

$$v=(v-\sum_{i=1}^{n}k_iw_i)+\sum_{i=1}^{n}k_iw_i$$

برقرار است که نتیجه می‌دهد که $v\in U+W$ است. چون v یک عضو دلخواه از V بود، پس $V\subseteq U+W$ برقرار است. حال برای این‌که نشان‌دهیم $V=U\bigoplus W$ است، باید ثابت کنیم که $U\cap W=0$.
فرض کنید که $v\in U\cap W$ پس وجود دارد $k_1\ldots,k_n\in F$ به‌طوری‌که

$$v=\sum_{i=1}^{n}k_iw_i$$

است. از این رو داریم $0=\pi(v)=\sum_{i=1}^{n}k_i(w_i+U)$ در آن π یک $canonical quotient map$ از V به V/U است. حال چون $w_1+U,\ldots,w_n+U$ یک پایه برای V/U است، داریم که $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$ است. بنابراین

$$v=\sum_{i=1}^{n}k_iw_i=0$$

که نتیجه می‌دهد که $U\cap W=0$. است.
ب) از آن‌جایی که V/U متناهی البعد است، می‌توانیم فرض کنیم $v_1+U,\ldots,v_n+U$ یک پایه برای V/U باشد. بنابراین برای هر $v\in V$ مقادیر یکتای $k_1\ldots,k_n\in F$ وجود دارد به‌طوری که

$$v+U=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(v_i+U)$$

که نتیجه می‌دهد که

$$v-\sum_{i=1}^{n}\lambda_iv_i\in U.$$

است. تعریف کنید $\varphi:V\to U\times V/U$ که

$$\varphi(v)=(v-\sum_{i=1}^{n}\lambda_iv_i,\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(v\_i+U))$$

در ابتدا بررسی می‌کنیم که φ خطی است. برای هر $v,w\in V$ داریم که

$$v+U=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(v_i+U)$$

و

$$w+U=\sum_{i=1}^{n}\eta_i(v_i+U)$$

برای برخی مقادیر $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in F$ و $\eta_1,\ldots,\eta_n\in F$ برقرار است. بنابراین برای هر $\lambda\in F$ داریم که

$$(v+\lambda w)=(v+U)+\lambda(w+U)=\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i+\lambda\eta_i)(v_i+U)$$

از این رو

$$\varphi(v+\lambda w) = (v+\lambda w - \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i + \lambda\eta_i)(v_i), \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i+\lambda\eta_i)(v_i+U))$$

است و چون

$$\varphi(v) = (v - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i, \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(v\_i+U))$$

پس داریم که

$$\varphi(v) + \lambda\varphi(w) = \varphi(v+\lambda w)$$

و بنابراین φ خطی است.
حال اگر $\varphi(v) = 0$ آن‌گاه طبق تعریف فوق $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ و

$$0 = v - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i = v$$

است.
برای $(u, \sum_{i=1}^{n}\xi(v\_i+U)) \in U \times V/U$ و به‌آسانی مشاهده می‌شود که

$$\varphi(u, \sum_{i=1}^{n}\xi v_i) = (u, \sum_{i=1}^{n}\xi(v\_i+U))$$

است. پس φ یکریخت است و بنابراین V با $U \times (V/U)$ یکریخت است.

پاسخ سوال چهارم

پایه‌ای مانند $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ از W را در نظر بگیرید. هر عضو $x \in W \cap P$ را می‌توان به صورت

$$x = x_1w_1 + x_2w_2 + \cdots + x_mw_m \ ; \ x_i \in F \quad (1)$$

نوشت. هم‌چنین می‌توان نوشت

$$w_i = \mu_{i1}e_1 + \mu_{i2}e_2 + \cdots + \mu_{in}e_n \ , \mu_{ij} \in F \ ; \ i = 1, 2, \ldots, n \quad (2)$$

و

$$x = \lambda_1e_1 + \lambda_2e_2 + \cdots + \lambda_ne_n \ , \lambda_i = 0, 1 \quad (3)$$

از هر سه رابطه فوق به دستگاه

$$\begin{cases} \mu_{11}x_1 + \mu_{21}x_2 + \cdots + \mu_{m1}x_m = \lambda_1 \\ \mu_{12}x_1 + \mu_{22}x_2 + \cdots + \mu_{m2}x_m = \lambda_2 \\ \vdots \\ \mu_{1n}x_1 + \mu_{2n}x_2 + \cdots + \mu_{mn}x_m = \lambda_n \end{cases}$$

می‌رسیم. رتبه‌ی این دستگاه با توجه به روابط (۲) برابر با m است. بنابذ این $x_1, \ldots, x_m$ از m تا از این معادلات به‌طور کامل به دست می‌آیند و چون طرف دوم این m معادله حداکثر 2^m انتخاب دارد، پس حداکثر 2^m جواب برای $(x_1, \ldots, x_m)$ به دست می‌آید و از رابطه (۱) حکم نتیجه می‌شود.

پاسخ سوال پنجم

۱-
مقادیر داده شده $k_1, k_2 \in F$ و $v_1, v_2 \in V$ داریم. برای هر $\varphi \in V'$ داریم:

$$(\Lambda(k_1v_1+k_2v_2))(\varphi) = \varphi(k_1v_1+k_2v_2) = k_1\varphi(v_1)+k_2\varphi(v_2) = k_1(\Lambda v_1)(\varphi)+k_2(\Lambda v_2)(\varphi) = (k_1\Lambda v_1+k_2\Lambda v_2)(\varphi)$$

از آنجایی که حکم فوق برای هر φ برقرار است، پس

$$\Lambda(k_1v_1 + k_2v_2) = k_1\Lambda v_1 + k_2\Lambda v_2$$

بنابر این Λ تبدیل خطی از V به V'' است.
۲- برای هر $v \in V$ داده شده، $(T'' \circ \lambda)v = T''(\Lambda v)$ و $(\Lambda \circ T)v = \Lambda(Tv)$ اعضای V'' هستند. برای اثبات تساوی کافی است ثابت کنیم که برای هر $f \in V'$ داریم:

$$(T''(\Lambda v))f = (\Lambda(Tv))f$$

برای اثبات داریم

$$(T''(\Lambda v))f = (\Lambda v)(T'f) = (T'f)v = f(Tv)$$

و طبق تعریف Λ داریم که

$$(\Lambda(Tv))f = f(Tv)$$

بنابراین داریم $T''(\Lambda v) = \Lambda(Tv)$ و پس

$$(T'' \circ \lambda)v = (\Lambda \circ T)v$$

حال چون v یک بردار دلخواه بود، پس ثابت می‌شود که $T'' \circ \lambda = \Lambda \circ T$ است.