سوال 1

فرض کنید V یک فضای برداری nبعدی باشد و $W \subset V$ یک زیرفضای r بعدی که $r < n$ باشد. نشان دهید:

$W = \bigcap\{U | W \subset U$ که Uیک زیرفضای $(n-1)$بعدی از V باشد$\}$

سوال 2

فرض کنید برای ماتریس $A \in M_{n\times n}$ داشته باشیم: $A^2 = A$. ثابت کنید:

$$rank(A) + rank(A - I) = n$$

سوال 3

۱. فرض کنید U زیرفضایی از V باشد به طوری که بعد V/U متناهی باشد. ثابت کنید وجود دارد زیرفضای W از V که $dim\ \ W = dim\ \ V/U$ و $V = U \oplus W$.

۲.فرض کنید U زیرفضایی از V باشد به طوری که بعد V/U متناهی باشد. ثابت کنید V با $U \times (V/U)$ یکریخت است.

سوال 4

فرض کنید V یک فضای برداری nبعدی و $\{e_1, ..., e_n\}$ پایه‌ای از آن باشد. مجموعه $P = \{\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n | \lambda_i \in \{0, 1\}\}$ را در نظر می‌گیریم. نشان دهید برای هر زیرفضای mبعدی W از V تعداد اعضای مجموعه $W \cap P$ کمتر یا مساوی با 2^m است.

سوال 5

فضای دوگان مضاعف V که با V'' نمایش می‌دهیم را فضای دوگان V' تعریف می‌کنیم. به بیان دیگر: $V'' = (V')'$. تعریف کنید $\Lambda : V \to V''$ که $(\Lambda v)(\varphi) = \varphi(v)$ برای هر $\varphi \in V', v \in V$.

۱. نشان دهید Λ یک تبدیل خطی از V به V'' است.

۲. نشان دهید اگر $T \in L(V)$ آنگاه $T'' \circ \Lambda = \Lambda \circ T''$ که $T'' = (T')'$.

۳. نشان دهید اگر بعد V متناهی باشد آنگاه Λ یک یکریختی از V به V'' است.

(اگر بعد V متناهی باشد آنگاه V و V' یکریخت‌اند ولی پیدا کردن یک یکریختی از V به V' نیازمند انتخاب یک پایه از V است. ولی یکریختی Λ از V به V'' نیاز به انتخاب پایه ندارد و طبیعی‌تر به نظر می‌رسد.)