۱

۱.۱

برای چندجمله‌ای $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ فرض کنید $\int_{-1}^{1} f = 0$ پس داریم $\frac{a}{5} + \frac{c}{3} + e = 0$. حال اگر یک پایه برای این معادله خطی بیابیم و آن را در f(x) قرار دهیم یک پایه برای U خواهیم داشت. مثالی برای پایه برای U : $\{x, 3x^2 - 1, x^3, 5x^4 - 1\}$.

۲.۱

$\{1, x, 3x^2 - 1, x^3, 5x^4 - 1\}$

۳.۱

قرار دهید $W = \{c | c \in \mathbb{R}\}$ آنگاه طبق ۲.۱: $P_4(\mathbb{R}) = U \oplus W$.

۲

چون $v_1, ..., v_n$ فضای V را پدید می‌آورند پس برای هر $v \in V$ وجود دارند اسکالرهای $a_1, ..., a_n$ که $v = a_1v_1 + ... + a_nv_n$ و از آنجایی که $T \in L(V, W)$ پس $Tv = a_1Tv_1 + ... + a_nTv_n$ پس برد T زیرمجموعه فضایی است که $Tv_1, ..., Tv_n$ می‌سازند از طرف دیگر برد T شامل $Tv_1, ..., Tv_n$ است پس طبق تعریف $Tv_1, ..., Tv_n$ برد T را پدید می‌آورند.

۳

ابتدا نشان می‌دهیم $S(A)$ تحت جمع و ضرب اسکالر بسته است.فرض کنید $X, Y \in S(A)$ و c یک اسکالر باشد پس $A(X+Y) = AX + AY = 0$ و $A(cX) = c(AX) = 0$ پس $S(A)$ زیرفضایی از $M_{n\times p}(\mathbb{C})$ است. حال اگر $m = n$ و $X \in S(A^k)$ آنگاه:

$$A^kX = 0 \Rightarrow A^{k+1}X = A(A^kX) = 0 \Rightarrow X \in S(A^{k+1}) \Rightarrow S(A^k) \subseteq S(A^{k+1})$$

از آنجایی که $S(A^k)$ زیرفضایی از $M_{n\times p}(\mathbb{C})$ است و درجه $M_{n\times p}(\mathbb{C})$ متناهی است پس باید وجود داشته باشد عدد صحیح مثبت r که $\dim S(A^r) = \dim S(A^{r+1})$ پس:

$$S(A^r) = S(A^{r+1}) \Rightarrow S(A) \subset S(A^2) \subset ... \subset S(A^r) = S(A^{r+1}) = ...$$

۴

فرض کنید وجود دارند اسکالرهای $a_0, ..., a_{m-1}$ که $a_0x + a_1Tx + ... + a_{m-1}T^{m-1}x = 0$ با ضرب T^{m-1} در طرفین و از آنجایی که برای هر $T^mx = 0, x \in V$ باید داشته باشیم $a_0T^{m-1}x = 0$ که نتیجه می‌دهد $a_0 = 0$ و به استقرا ثابت می‌شود همه a_k باید 0 باشند (در هر مرحله طرفین را در T^{m-k-1} ضرب کنید.) پس $x, Tx, ..., T^{m-1}x$ مستقل خطی هستند.

۵

۱.۵

اگر $A = [a_{ij}]_{m\times n}, B = [b_{ji}]_{n\times m}$ آنگاه داریم:

$$tr(AB) = tr(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2m} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{nm} \end{bmatrix}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} =$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_{ji}a_{ij} = tr(\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2m} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}) = tr(BA)\surd$$

۲.۵

طبق قسمت الف S زیرمجموعه تمام ماتریس‌هایی است که tr آن‌ها صفر است که درجه آن $n^2 - 1$ است پس حداکثر درجه $S, n^2 - 1$ است ثابت می‌کنیم دقیقاً $n^2 - 1$ است. مجموعه $A =$ $\{E_{ij}, E_{11} - E_{kk} | i \neq j, k \neq 1\}$ را در نظر بگیرید که E_{ij} ماتریسی است که درایه (i, j)اش یک و باقی درایه‌هایش برابر صفر هستند و A پایه‌ای برای مجموعه تمام ماتریس‌هایی است که tr آن‌ها صفر است. حال با توجه به تساوی زیر ثابت می‌شود تمام اعضای A را می‌توان به صورت $E_{ij}E_{pq} - E_{pq}E_{ij}$ نوشت:

(۱)

$$\left.\begin{aligned} E_{ij}E_{pq} - E_{pq}E_{ij} = \delta_{jp}E_{iq} - \delta_{qi}E_{pj} \\ \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} E_{ij} = E_{ik}E_{kj} - E_{kj}E_{ik} & i \neq j \\ E_{11} - E_{ii} = E_{1i}E_{i1} - E_{i1}E_{1i} & i \neq 1 \end{cases}$$

پس S همان مجموعه تمام ماتریس‌هایی است که tr آن‌ها صفر است پس $\dim(S) = n^2 - 1$.