۱

۱.۱

۱.۱.۱

$0 \in W_1, 0 \in W_2 \Rightarrow 0 \in W_1 \cap W_2 \surd$

$$v, w \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow \begin{cases} v, w \in W_1 \Rightarrow v + w \in W_1 \\ v, w \in W_2 \Rightarrow v + w \in W_2 \end{cases} \Bigg\} \Rightarrow v + w \in W_1 \cap W_2 \surd \quad (۱)$$

$$v \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow \begin{cases} v \in W_1 \xrightarrow{c \in F} cv \in W_1 \\ v \in W_2 \xrightarrow{c \in F} cv \in W_2 \end{cases} \Bigg\} \Rightarrow cv \in W_1 \cap W_2 \surd \quad (۲)$$

۲.۱.۱

$0 \in W_1, 0 \in W_2 \Rightarrow 0 = 0 + 0 \in W_1 + W_2 \surd$

(۳)

$$\left.\begin{array}{r} v = v_1 + v_2 \in W_1 + W_2 : v_1 \in W_1, v_2 \in W_2 \\ w = w_1 + w_2 \in W_1 + W_2 : w_1 \in W_1, w_2 \in W_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} v_1 + w_1 \in W_1 \\ v_2 + w_2 \in W_2 \end{cases} \Bigg\} \Rightarrow$$

$$(v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) \in W_1 + W_2 \Rightarrow v + w = (v_1 + v_2) + (w_1 + w_2) \in W_1 + W_2 \surd$$

(۴)

$$v = v_1 + v_2 \in W_1 + W_2 : \begin{cases} v_1 \in W_1 \xrightarrow{c \in F} cv_1 \in W_1 \\ v_2 \in W_2 \xrightarrow{c \in F} cv_2 \in W_2 \end{cases} \Bigg\} \Rightarrow cv_1 + cv_2 \in W_1 + W_2$$

$$\Rightarrow c(v_1 + v_2) \in W_1 + W_2 \Rightarrow cv \in W_1 + W_2 \surd$$

۳.۱.۱

$v \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow v \in W_1 \Rightarrow v \in W_1 \cup W_2 \Rightarrow W_1 \cap W_2 \subseteq W_1 \cup W_2 \surd (*)$

$$v \in W_1 \cup W_2 \Rightarrow \begin{cases} v \in W_1 \xrightarrow{0 \in W_2} v = v + 0 \in W_1 + W_2 \\ \text{or} \\ v \in W_2 \xrightarrow{0 \in W_1} v = 0 + v \in W_1 + W_2 \end{cases} \Bigg\} \Rightarrow \quad (۵)$$

$v \in W_1 + W_2 \Rightarrow W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2 \surd (**)$
$(*), (**) \Rightarrow W_1 \cap W_2 \subseteq W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2$

۲.۱

زیرفضاهای W_2, W_1 را به ترتیب محور xها و yها در نظر بگیرید آنگاه $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ که زیرمجموعه دو محور که همان اجتماع W_2, W_1است می‌باشد هم‌چنین هر نقطه (x , y) در صفحه مختصات برابر با (0 , y) + (x , 0) که $(x, 0) \in W_1$,$(0, y) \in W_2$ پس $(x, y) \in W_1 + W_2$ پس $W_1 + W_2$ کل صفحه مختصات است که شامل 2 محور که همان $W_1 \cup W_2$ است نیز می‌باشد.

۳.۱

اگر وجود داشته باشد $v \in W_1$,$v \notin W_2$ و هم‌چنین $w \in W_2$,$w \notin W_1$ آنگاه برای این که $W_1 \cup W_2$ زیرفضا باشد باید داشته باشیم:

$$\left.\begin{aligned} v \in W_1 \cup W_2 \\ w \in W_1 \cup W_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow v + w \in W_1 + W_2 \Rightarrow \begin{cases} v + w \in W_1 \xrightarrow{v \in W_1 \Rightarrow -v \in W_1} \\ \text{or} \\ v + w \in W_2 \xrightarrow{w \in W_2 \Rightarrow -w \in W_2} \end{cases} \tag{۶}$$

$$\left\{\begin{aligned} & -v + v + w \in W_1 \Rightarrow w \in W_1 \text{ تناقض} \\ & \text{or} \\ & -w + v + w \in W_2 \Rightarrow v \in W_2 \text{ تناقض} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ تناقض} \tag{۷}$$

پس یکی از این زیرفضاها باید زیرمجموعه دیگری باشد که در این صورت اجتماعشان یکی از آن‌ها است که زیرفضا است.

۴.۱

$$\left.\begin{aligned} v \in W_1 \Rightarrow v \in W_1 \cup W_2 \\ w \in W_2 \Rightarrow w \in W_1 \cup W_2 \\ W_1 \cup W_2 \subseteq S \end{aligned}\right\} \Rightarrow v \in S, w \in S \Rightarrow v + w \in S \Rightarrow W_1 + W_2 \subseteq S \tag{۸}$$

۲

برای این که ثابت کنیم Y زیرفضای X است باید 3 شرط زیر را اثبات کنیم:(F میدان است.)

$(1) 0 \in Y$
$(2) \forall v, w \in Y : v + w \in Y$
$(3) \forall v \in Y, \lambda \in F : \lambda v \in Y$

شرط (1): بدیهی است زیرا تابع ثابت صفر در همه نقاط صفر است.
شرط (2): اگر درجه دو چندجمله‌ای کمتر از n باشد درجه حاصل جمعشان هم کمتر از n است و از طرفی اگر هر دو چندجمله‌ای در نقطه‌ای صفر باشند آنگاه حاصل جمعشان هم در آن نقطه صفر است پس این شرط هم برقرار است.
شرط (3): اگر درجه یک چندجمله‌ای کمتر از n باشد و در یک اسکالر ضرب شود بازهم درجه‌اش کمتر

از n باقی می‌ماند هم‌چنین بازهم در نقاطی که در ابتدا صفر می‌شد صفر می‌شود پس این شرط هم برقرار است.

۳

۱.۳

زیرفضا نیست زیرا نسبت به جمع بسته نیست.مثال:

در جایگاه‌های فرد 1 و در جایگاه‌های زوج 0 → $a = (1 , 0 , 1 , 0 , ...)$

در جایگاه‌های فرد 0 و در جایگاه‌های زوج 1 → $b = (0 , 1 , 0 , 1 , ...)$

در همه جایگاه‌ها 1 → $a + b = (1 , 1 , 1 , 1 , ...)$ پس عضو مجموعه نیست.

۲.۳

زیرفضا است زیرا $(0 , 0 , 0 , ...)$ که عضو مجموعه است و نیز اگر دو عضو a , b از یک جایی به بعد صفر باشند حاصل جمع آن‌ها هم از یک جایی به بعد صفر است زیرا:

$$\left.\begin{array}{l} a = (\underbrace{...}_{n_1}, 0, 0, ...) \\ b = (\underbrace{...}_{n_2}, 0, 0, ...) \end{array}\right\} \Rightarrow a + b = (\underbrace{...}_{n}, 0, 0, ...), n \leq max(n_1, n_2) \tag{۹}$$

اگر یک اسکالر هم در برداری که از یک جایی به بعد صفر است ضرب کنیم باز هم از همان‌جا به بعد صفر می‌شود.

۳.۳

زیرفضا نیست زیرا اگر یک دنباله نزولی را که همه اعضایش برابر نیستند در 1- ضرب کنیم دیگر نزولی نخواهد بود.

۴.۳

زیرفضا است زیرا اولاً می‌دانیم دنباله ثابت صفر همگرا است به صفر ثانیاً اگر دو دنباله همگرا به a , b داشته باشیم آنگاه جمع آن دو به $a + b$ همگرا است ثالثاً اگر دنباله همگرا به a را در اسکالر c ضرب کنیم به ac همگرا می‌شود.

۵.۳

زیرفضا است زیرا اولاً $(0 , 0 , 0 , ...)$ عضو مجموعه است زیرا تفاضل هر دو جمله متوالی ثابت صفر است ثانیاً داریم:

$$X=(x_1,x_2,...),x_{j+1}-x_j=a \Rightarrow \alpha X=(\alpha x_1,\alpha x_2,...),\alpha x_{j+1}-\alpha x_j=\alpha a\surd$$

$$\left.\begin{aligned} X=(x_1,x_2,...),x_{j+1}-x_j=a\\ Y=(y_1,y_2,...),y_{j+1}-y_j=b\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} X+Y=(x_1+y_1,x_2+y_2,...)\\ (x_{j+1}+y_{j+1})-(x_j+y_j)=a+b\end{cases} \quad \surd \tag{۱۰}$$

۶.۳

زیرفضا نیست. مثال:
جمع دو دنباله هندسی (... , 1 , 1 , 1 , 1) , (... , 8 , 4 , 2 , 1) برابر (... , 9 , 5 , 3 , 2) است که هندسی نیست.

۴

$$\alpha\in V\Rightarrow \alpha\in W_1+W_2\Rightarrow \exists v\in W_1,w\in W_2:\alpha=v+w\surd$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha=\alpha_1+\alpha_2:\alpha_i\in W_i\\ \alpha=\beta_1+\beta_2:\beta_i\in W_i\end{aligned}\right\}\Rightarrow \alpha_1+\alpha_2=\beta_1+\beta_2\Rightarrow \alpha_1-\beta_1=\beta_2-\alpha_2(*) \tag{۱۱}$$

$$\left.\begin{aligned} v=\alpha_1-\beta_1\in W_1\\ w=\beta_2-\alpha_2\in W_2\\ W_1\cap W_2=\{0\}\\ (*)\end{aligned}\right\}\Rightarrow \alpha_1-\beta_1=0=\beta_2-\alpha_2\Rightarrow \alpha_1=\beta_1,\alpha_2=\beta_2\surd \tag{۱۲}$$

۵

فرض می‌کنیم که این اتفاق افتاده باشد یعنی $V=\bigcup_{i=1}^n V_i$ که V_iها زیرفضاهای سره V هستند و نیز نمی‌توان هیچ‌کدام از V_iها را حذف کرد یعنی هیچ‌کدام از V_iها توسط بقیه تولید نمی‌شوند (اگر چنین V_iای بود آن را حذف کنید.). یک عضو دلخواه $x\in V_1$ در نظر بگیرید می‌دانیم که V_1 سره است پس وجود دارد $y\in V-V_1$.حال مجموعه $\{x+ay|a\in\mathbb{R}-\{0\}\}$ را در نظر بگیرید. اعضای این مجموعه هیچ‌کدام عضو V_1 نیستند زیرا اگر باشند داریم:

$$\left.\begin{aligned} x+a_1y\in V_1\\ x\in V_1\Rightarrow -x\in V_1\end{aligned}\right\}\Rightarrow a_1y\in V_1\xrightarrow{a_1^{-1}\in\mathbb{R}} a_1^{-1}a_1y\in V_1\Rightarrow y\in V_1 \text{ تناقض} \tag{۱۳}$$

پس اعضای این مجموعه همه در $V_2,...,V_n$ هستند. تعداد اعضای این مجموعه بی‌نهایت است پس طبق اصل لانه کبوتری وجود دارد $V_k(2\le k\le n)$ به طوری که حداقل 2تا از اعضای مجموعه در آن بیافتند پس:

$$\left.\begin{aligned} x+a_1y\in V_k\\ x+a_2y\in V_k\end{aligned}\right\}\Rightarrow (a_1-a_2)y\in V_k \xrightarrow{a_1\neq a_2\Rightarrow (a_1-a_2)^{-1}\in\mathbb{R}} (a_1-a_2)^{-1}(a_1-a_2)y\in V_k \tag{۱۴}$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow y \in V_k \Rightarrow -a_1 y \in V_k \\ x + a_1 y \in V_k \end{array}\right\} \Rightarrow x \in V_k \tag{۱۵}$$

اما دقت کنید که ما x را دلخواه در نظر گرفتیم بنابراین تمام اعضای V_1 در بقیه زیرفضاها یافت می‌شوند پس V_1 را می‌توان حذف کرد که تناقض است. پس نمی‌توانیم یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ را به صورت اجتماع متناهی زیرفضای سره از آن بنویسیم.