From the *Critique*: A714/B742 (1)

Philosophical cognition is rational cognition from concepts, mathematical cognition that from the construction of concepts. But to construct a concept means to exhibit a priori the intuition corresponding to it. For the construction of a concept, therefore, a nonempirical intuition is required, which consequently, as intuition, is an individual object, a but that must nevertheless, as the construction of a concept (of a general representation), express in the representation universal validity for all possible intuitions that belong under the same concept.(cont.)

From the *Critique*: A714/B742 (2)

Thus, I construct a triangle by exhibiting an object corresponding to this concept, either through mere imagination, in pure intuition, or on paper, in empirical intuition, but in both cases completely a priori, without having had to borrow the pattern for it from any experience. The individual drawn figure is empirical, and nevertheless serves to express the concept without damage to its universality …

From the *Critique*: A714/B742 (3)

Philosophical cognition thus considers the particular only in the general; mathematical cognition considers the general in the particular, nay, even in the particular instance, but nonetheless does so *a priori* and by means of reason, in such a way that, just as this single instance is determined under certain universal conditions of construction, so too the object of the concept … must be thought as universally determined.

How is Pure Mathematics Possible?

How now is a great body of cognition…which carries apodictic certainty …hence rests on no grounds of experience, and so is a pure product of reason, but beyond this is thoroughly synthetic. "How is it possible then for human reason to achieve such a cognition wholly *a priori*?"

….all mathematical cognition … must present its concept beforehand *in intuition* and indeed *a priori* … in intuition that is not empirical but pure …

- Prolegomena, Section 6

<u>Bernard Bolzano</u> (1781-1848)

- **Considerations on Some Objects of Elementary Geometry** (1804)
- **Contributions to a Better-Grounded Presentation of Mathematics** (1810)
- **Purely analytic proof of the theorem that between any two values which give results of opposite sign, there lies at least one real root of the equation** (1817)
- **Paradoxes of the Infinite** (1850)

Johannes Herbart (1776-1841)

امروز به عنوان یکی از پایه‌گذاران روانشناسی و علم تعلیم و تربیت مطرح است، ولی زمان خود فیلسوف محسوب می‌شد. نفوذ او بر دانشمندان زیر در روش علمی، به خصوص رویکرد مفهومی است

- **Bernhard Riemann** (1826-1866)
- **Hermann Grassmann** (1809-1877)
- **Ernst Mach** (1838-1916)

پیرامون فرض‌هایی که هندسه برمبنای آن قرار دارد

چنان که همه می‌دانند موضوع هندسه، مفهوم فضا و اصول اولیه ساخت در فضا است. این چیزها فقط به صورت اسمی تعریف می‌شوند ولی خصوصیات اساسی‌شان توسط اصول موضوع مشخص می‌شود. روابط میان این پیش‌فرضها به شکل مبهم رها می‌شود و معلوم نمی‌گردد که آیا ارتباط میان آنها ضروری است، و اگر هست به چه میزان، آیا این ارتباط پیشینی است، و آیا حتی چنین ارتباطی امکان پذیراست؟ از اقلیدس تا لژاندر (که از معروفترین اصلاح‌گران نام برده باشم) این ابهام را نه ریاضی‌دانان برطرف کرده‌اند و نه فلاسفه. بی‌شک دلیل این است که مفهوم کلی کمیت چند بعدی (که کمیات هندسی را نیز شامل می‌شود) تاکنون مورد بررسی قرار نگرفته است.

چند نکته خطابه ریمان

- مطرح کردن زیرساخت کمیت چند بعدی (خمینه) به عنوان جایگاه هندسه
- اینکه بینهایت نوع هندسه می‌توان روی یک خمینه وضع کرد
- هندسه محدودیت بُعد ندارد، حتی هندسه‌های بینهایت بعدی و صفربعدی قابل طرح‌اند
- تفکیک هندسه و کیهان‌شناسی در رابطه با فیزیک جهان موجود