



دانشکده‌ی علوم ریاضی

مدرس: دکتر شهرام خزایی

احتمال و کاربرد آن

تمرین سری پنج

مهلت ارسال: ۱۸ خرداد

گردآورنده: علیرضا غضنفریان پور

- پاسخ‌های خود را در قالب یک فایل PDF با نام ID-Hw5 ارسال نمایید که ID شماره‌ی دانشجویی شما می‌باشد.
- یادآوری می‌شود که در اختیار دادن راه‌حل‌های مکتوب به سایر دانشجویان و یا منتشر کردن آن در اینترنت یا شبکه‌های اجتماعی غیر مجاز است و عواقب آن بر عهده نویسنده پاسخ است.
- مشورت در تمرین‌ها مجاز است و توصیه می‌شود اما هر دانش‌جو موظف است که تمرین را به تنهایی انجام دهد و راه‌حل نهایی ارسال شده باید توسط خود دانش‌جو نوشته شده باشد. در صورت مشاهده هر گونه تخلف، نمره‌ی تمام تمرینات شخص خاطی صفر لحاظ خواهد شد.
- تمریناتی که به صورت دست‌نویس تحویل داده می‌شوند، باید به صورت کاملاً خوانا نوشته شود و با کیفیتی مطلوب و حجم پایین، اسکن و ارسال شود.

سؤال ۱ فرض کنید متغیرهای تصادفی X, Y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر هستند

$$f(x, y) = \frac{1 + xy}{c} \quad ; |x|, |y| < 1$$

که در آن c ثابت است. ابتدا مقدار c را بیابید و سپس نشان دهید X, Y مستقل نیستند، ولی X^2, Y^2 مستقل هستند.

سؤال ۲ فرض کنید X, Y دو متغیر تصادفی با توزیع نرمال توأم باشند. نشان دهید هر ترکیب خطی از این دو نیز دارای توزیع نرمال است.

سؤال ۳ فرض کنیم X, Y دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع‌های تجمعی F, G باشند. تابع توزیع تجمعی توأم متغیرهای $\max\{X, Y\}$ و $\min\{X, Y\}$ را بیابید.

سؤال ۴ نواحی a و b در معرض طوفان قرار دارند. یک بررسی نشان داده است که تعداد طوفان‌هایی که در ناحیه a رخ می‌دهد از توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای ۴ و ۰.۷ پیروی می‌کند. علاوه بر آن، بررسی نشان داده است هنگامی که n طوفان در ناحیه a رخ می‌دهد، با احتمال $2/3$ تعداد n و با احتمال $1/2$ تعداد $n + 1$ طوفان در ناحیه b رخ می‌دهد. مقدار مورد انتظار تعداد طوفان‌هایی که در ناحیه a رخ می‌دهد را در سالی که ۳ طوفان در ناحیه b رخ داده است محاسبه کنید.

سؤال ۵ فرض کنید A, B, C متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکنواخت بر روی بازه $(0, 1)$ باشند. می‌دانیم معادله درجه دو $AX^2 - BX + C = 0$ دو جواب به صورت

$$X_+ = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad X_- = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (۱)$$

دارد. در این تمرین قصد داریم توزیع توأم X_+, X_- را به شرط حقیقی بودن جواب‌ها بیابیم.
 (الف) برای این کار، متغیرهای کمکی $\Theta = B/2A, \Phi = C/A$ را تعریف می‌کنیم. سعی کنید توزیع توأم Θ, Φ را بیابید.
 (ب) حال سعی کنید X_+, X_- را بر حسب Θ, Φ بنویسید. شرط حقیقی بودن ریشه‌ها بر حسب Θ, Φ به چه صورت است؟
 (پ) به کمک پاسخ خود برای قسمت الف و ب، توزیع توأم X_+, X_- را به شرط حقیقی بودن آن‌ها، محاسبه کنید.

سؤال ۶ فرض کنید میدانیم چگونه از توزیع‌های پیوسته با توابع چگالی احتمال f_1, f_2 نمونه تصادفی تولید کنیم. حال اگر $p_1, p_2 \geq 0$ داشته باشیم و $p_1 + p_2 = 1$. آیا می‌توانید راهی برای تولید نمونه تصادفی از توزیع پیوسته با تابع چگالی احتمال $p_1 f_1 + p_2 f_2$ پیشنهاد کنید؟

سؤال ۷ (عملی) فرض کنید X, Y متغیرهای تصادفی یکنواخت روی بازه $(0, 1)$ و مستقل از یکدیگر باشند.
 (الف) مقدار $E[\frac{X}{Y} | X \leq 2Y]$ را محاسبه کنید.
 (ب) با استفاده از ۱۰ هزار نمونه تصادفی مستقل از X, Y (از هر کدام ۱۰ هزار نمونه تصادفی) تخمینی از تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی $Z = \frac{X}{Y}$ مشروط بر پیشامد $A = \{X \leq 2Y\}$ به دست آورده و با پاسخ خود از قسمت الف مقایسه کنید.