دانشکده‌ی علوم ریاضی

احتمال و کاربرد آن مدرس: دکتر شهرام خزایی

پاسخ تمرین سری سه

سؤال ۱ می‌گوییم در یک جمع n نفره یک فرد خوشحال است اگر حداقل یک نفر در بین $n-1$ نفر دیگر وجود داشته باشد که روز تولدش با او یکسان باشد. متغیر تصادفی X را تعداد افراد خوشحال در این جمع در نظر بگیرید. اگر تعداد روزهای سال را N در نظر بگیریم

الف. ساپورت X را مشخص کنید.

ب. تابع جرم احتمال را برای مقادیر $x = 0, 1, 2, 3$ محاسبه کنید.

پاسخ.

الف. اگر $N \leq n$ آنگاه به وضوح ساپورت X برابر است با $\{0, 2, 3, \ldots, n\}$. در غیر این صورت ساپورت X برابر است با $\{n-N+1, n-N+2, \ldots, n\}$. دقت کنید که بنابر اصل لانه کبوتری تعداد افراد خوشحال نمی‌تواند کمتر از $n-N+1$ باشد و همه‌ی مقادیر از $n-N+1$ تا n نیز امکان‌پذیرند.

ب.

$$\begin{aligned}
\Pr(X=0) &= \frac{\binom{N}{n} n!}{N^n} \\
\Pr(X=1) &= 0 \\
\Pr(X=2) &= \frac{N\binom{n}{2}\binom{N-1}{n-2}(n-2)!}{N^n} \\
\Pr(X=3) &= \frac{N\binom{n}{3}\binom{N-1}{n-3}(n-3)!}{N^n}
\end{aligned}$$

سؤال ۲ یک تاس را پرتاب می‌کنیم، اگر عدد رو شده فرد بود همان را به عنوان خروجی در نظر می‌گیریم. اگر زوج بود یک عدد تصادفی یکنواخت از بازه‌ی $[0, 6]$ تولید می‌کنیم و آن را خروجی می‌دهیم. تابع توزیع تجمعی عدد خروجی را محاسبه کنید.

پاسخ. فرض کنید X عدد خروجی باشد. احتمال این که $X < x$ در صورتی که $x < 1$ به وضوح برابر است با $\frac{x}{12}$. اگر $1 \leq x < 3$ این احتمال برابر است با $\frac{x}{12} + \frac{1}{6}$ زیرا به احتمال $\frac{1}{6}$ عدد اول رو شده یک می‌شود. به طور

مشابه بقیه‌ی احتمال‌ها نیز محاسبه می‌شوند و جواب نهایی برابر است با

$$F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{12} & x < 1 \\ \dfrac{1}{6} + \dfrac{x}{12} & 1 \leq x < 3 \\ \dfrac{1}{3} + \dfrac{x}{12} & 3 \leq x < 5 \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{12} & 5 \leq x < 6 \\ 1 & 6 \leq x \end{cases}$$

سؤال ۳ شهری به صورت یک جدول ۱۰۰۰ در ۱۰۰۰ است که خانه‌های جدول، خانه‌های شهر هستند. شهرداری برای اداره‌ی بهتر، شهر را به منطقه‌هایی به شکل مربع‌های 50×50 افراز کرده است. در این شهر به طور متوسط ماهیانه ۵۰۰ آتش‌سوزی رخ می‌دهد. احتمال وقوع آتش‌سوزی در هر منطقه در ماه چقدر است؟

پاسخ. تعداد آتش‌سوزی‌ها در شهر از توزیع پواسون پیروی می‌کند. شهر ۴۰۰ منطقه دارد بنابراین به طور متوسط در یک منطقه ماهیانه $\frac{500}{400} = 1/25$ آتش‌سوزی رخ می‌دهد. از آنجا که تعداد آتش‌سوزی‌ها در شهر از توزیع پواسون پیروی می‌کند، تعداد آتش‌سوزی‌ها در هر منطقه نیز توزیع پواسون دارد. بنابراین اگر X را تعداد آتش‌سوزی‌ها در یک منطقه در ماه در نظر بگیریم داریم

$$\Pr(X \geq 1) = 1 - \Pr(X = 0) = 1 - e^{-1/25} \approx 0/7135$$

سؤال ۴ یک فروشنده‌ی شیر هر بطری شیر را به قیمت ۱۰ تومان می‌خرد و به قیمت ۱۵ تومان می‌فروشد. هر بطری شیر در انتهای روز فاسد می‌شود و اگر فروش نرفته باشد دور ریخته می‌شود. اگر تقاضای روزانه‌ی بطری شیر از توزیع $\mathrm{Binomial}(10, \frac{1}{3})$ پیروی کند، فروشنده باید حدودا چند بطری شیر در ابتدای روز بخرد تا بیش‌ترین متوسط مقدار سود را داشته باشد؟

پاسخ. فرض کنید فروشنده n بطری شیر در ابتدای روز بخرد. در این صورت اگر تقاضای شیر X باشد در صورتی که $X \leq n$ مابه‌التفاوت خرید و فروش فروشنده برابر است با $15X - 10n$ و در غیر این صورت برابر است با $5n$. در نتیجه امید ریاضی مابه‌التفاوت خرید و فروش فروشنده برابر است با

$$\sum_{i=0}^{n} (15i - 10n) \binom{10}{i} \left(\frac{1}{3}\right)^i \left(\frac{2}{3}\right)^{10-i} + \sum_{i=n+1}^{10} 5n \binom{10}{i} \left(\frac{1}{3}\right)^i \left(\frac{2}{3}\right)^{10-i}$$

با بررسی مقادیر مختلف n می‌توان به این نتیجه رسید که بیشینه‌ی عبارت بالا به ازای $n = 3$ رخ می‌دهد.

سؤال ۵ دو نفر می‌خواهند دوئل کنند. می‌دانیم که اگر ماشه‌ی تفنگ این دو نفر کشیده شود، تفنگ نفر اول با احتمال p و تفنگ نفر دوم با احتمال q شلیک می‌کند. در صورت شلیک، فرد مقابل حتما کشته می‌شود. این دو نفر تا زمانی که هر دو زنده هستند، در هر ثانیه یک بار دوئل می‌کنند (همزمان با هم ماشه‌ی تفنگ خود را می‌کشند).

الف. اگر X تعداد ثانیه‌هایی باشد که هر دو زنده‌اند، $\mathbb{E}[X]$ را محاسبه کنید (اگر فردی در دوئل اول کشته شود، ۱ ثانیه زنده بوده است).

ب. احتمال اینکه در این دوئل هر دو نفر کشته شوند، چقدر است؟

پاسخ.

الف. دقت کنید که X یک متغیر تصادفی هندسی با پارامتر $(1-q)(1-p) - 1$ است زیرا احتمال کشته شدن حداقل یک نفر در هر دور دوئل برابر است با $(1-q)(1-p) - 1$. بنابراین

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{1-(1-p)(1-q)}.$$

ب. احتمال کشته شدن هر دو نفر در ثانیه‌ی nام برابر است با $pq(1-p)^{n-1}(1-q)^{n-1}$. بنابراین احتمال کشته شدن هر دو نفر برابر است با

$$\sum_{n=1}^{\infty} pq(1-p)^{n-1}(1-q)^{n-1} = \frac{pq}{1-(1-p)(1-q)}.$$

سؤال ۶ فرض کنید X یک متغیر تصادفی با مقادیر طبیعی باشد. ثابت کنید X بی‌حافظه است اگر و تنها اگر دارای توزیع هندسی باشد.

پاسخ. بی‌حافظه بودن یک متغیر تصادفی با مقادیر طبیعی معادل این است که $\Pr(X > m+n \mid X > m) = \Pr(X > n)$. برای یک متغیر تصادفی هندسی داریم $\Pr(X > n) = (1-p)^n$. بنابراین

$$\begin{aligned}
\Pr(X > m+n \mid X > m) = \frac{\Pr(X > m+n,\ X > m)}{\Pr(X > m)} &= \frac{\Pr(X > m+n)}{\Pr(X > m)} \\
&= \frac{(1-p)^{m+n}}{(1-p)^m} \\
&= (1-p)^n \\
&= \Pr(X > n).
\end{aligned}$$

پس شرط بی‌حافظه بودن ثابت می‌شود. حال فرض کنید شرط بی‌حافظه بودن برقرار باشد. اگر در این شرط قرار دهیم $m = 1$ نتیجه می‌شود $\Pr(X > n+1) = \Pr(X > 1)\Pr(X > n)$. فرض کنید $\Pr(X > 1) = 1 - p$. با استقرا روی n نتیجه می‌شود $\Pr(X > n) = (1-p)^n$ پس X یک متغیر تصادفی هندسی است.

سؤال ۷ پمپ بنزین شهر زیبا دارای یک جایگاه برای بنزین زدن است. ماشین‌ها در سه صف کنار هم برای بنزین زدن توقف کرده‌اند. هر بار که یک ماشین بنزین می‌زند و جایگاه خالی می‌شود، متصدی پمپ بنزین به صورت تصادفی یکی از سه ماشین سر صف‌ها را برای ورود به جایگاه انتخاب می‌کند. در ابتدا ماشین مرد خسته، دهمین ماشین در صف اول است. اگر ماشین مرد خسته Xامین ماشینی باشد که وارد جایگاه می‌شود، امید ریاضی و واریانس X را محاسبه کنید (فرض کنید صف‌ها طول نامتناهی دارند).

پاسخ. به سادگی می‌توان مشاهده کرد که X از توزیع دوجمله‌ای منفی پیروی می‌کند. بنابراین

$$\mathbb{E}[X] = \frac{r}{p} = 30,\ \mathrm{Var}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2} = 60.$$