



تمرین سری سه

گردآورنده: علیرضا دادگرنیا

مهلت ارسال: ۷ اردیبهشت

- پاسخ‌های خود را در قالب یک فایل PDF با نام Hw3-ID ارسال نمایید که ID شماره‌ی دانشجویی شما می‌باشد.
 - یادآوری می‌شود که در اختیار دادن راه‌حل‌های مکتوب به سایر دانشجویان و یا منتشر کردن آن در اینترنت یا شبکه‌های اجتماعی غیر مجاز است و عواقب آن بر عهده نویسنده پاسخ است.
 - مشورت در تمرین‌ها مجاز است و توصیه می‌شود اما هر دانش‌جو موظف است که تمرین را به تنهایی انجام دهد و راه‌حل نهایی ارسال شده باید توسط خود دانش‌جو نوشته شده باشد. در صورت مشاهده‌ی هر گونه تخلف، نمره‌ی تمام تمرینات شخص خاطی صفر لحاظ خواهد شد.
 - تمریناتی که به صورت دست‌نویس تحویل داده می‌شوند، باید به صورت کاملاً خوانا نوشته شود و با کیفیتی مطلوب و حجم پایین، اسکن و ارسال شود.
 - از بین سوالات ۱ تا ۷ چهار سوال را به دلخواه انتخاب کنید و آن‌ها را تحویل دهید.
- سؤال ۱ می‌گوییم در یک جمع n نفره یک فرد خوشحال است اگر حداقل یک نفر در بین $n - 1$ نفر دیگر وجود داشته باشد که روز تولدش با او یکسان باشد. متغیر تصادفی X را تعداد افراد خوشحال در این جمع در نظر بگیرید. اگر تعداد روزهای سال را N در نظر بگیریم
- الف. ساپورت X را مشخص کنید.
- ب. تابع جرم احتمال را برای مقادیر $x = 0, 1, 2, 3$ محاسبه کنید.
- سؤال ۲ یک تاس را پرتاب می‌کنیم، اگر عدد رو شده فرد بود همان را به عنوان خروجی در نظر می‌گیریم. اگر زوج بود یک عدد تصادفی یکنواخت از بازه‌ی $[0, 6]$ تولید می‌کنیم و آن را خروجی می‌دهیم. تابع توزیع تجمعی عدد خروجی را محاسبه کنید.
- سؤال ۳ شهری به صورت یک جدول 1000 در 1000 است که خانه‌های جدول، خانه‌های شهر هستند. شهرداری برای اداره‌ی بهتر، شهر را به منطقه‌هایی به شکل مربع‌های 50×50 افراز کرده است. در این شهر به طور متوسط ماهیانه 500 آتش‌سوزی رخ می‌دهد. احتمال وقوع آتش‌سوزی در هر منطقه در ماه چقدر است؟

سؤال ۴ یک فروشنده شیر هر بطری شیر را به قیمت ۱۰ تومان می‌خرد و به قیمت ۱۵ تومان می‌فروشد. هر بطری شیر در انتهای روز فاسد می‌شود و اگر فروش نرفته باشد دور ریخته می‌شود. اگر تقاضای روزانه‌ی بطری شیر از توزیع $\text{Binomial}(10, \frac{1}{4})$ پیروی کند، فروشنده باید حدوداً چند بطری شیر در ابتدای روز بخرد تا بیش‌ترین متوسط مقدار سود را داشته باشد؟

سؤال ۵ دو نفر می‌خواهند دوئل کنند. می‌دانیم که اگر ماشه‌ی تفنگ این دو نفر کشیده شود، تفنگ نفر اول با احتمال p و تفنگ نفر دوم با احتمال q شلیک می‌کند. در صورت شلیک، فرد مقابل حتماً کشته می‌شود. این دو نفر تا زمانی که هر دو زنده هستند، در هر ثانیه یک بار دوئل می‌کنند (همزمان با هم ماشه‌ی تفنگ خود را می‌کشند).

الف. اگر X تعداد ثانیه‌هایی باشد که هر دو زنده‌اند، $E[X]$ را محاسبه کنید (اگر فردی در دوئل اول کشته شود، ۱ ثانیه زنده بوده است).

ب. احتمال اینکه در این دوئل هر دو نفر کشته شوند، چقدر است؟

سؤال ۶ فرض کنید X یک متغیر تصادفی با مقادیر طبیعی باشد. ثابت کنید X بی‌حافظه است اگر و تنها اگر دارای توزیع هندسی باشد.

سؤال ۷ پمپ بنزین شهر زیبا دارای یک جایگاه برای بنزین زدن است. ماشین‌ها در سه صف کنار هم برای بنزین زدن توقف کرده‌اند. هر بار که یک ماشین بنزین می‌زند و جایگاه خالی می‌شود، متصدی پمپ بنزین به صورت تصادفی یکی از سه ماشین سر صف‌ها را برای ورود به جایگاه انتخاب می‌کند. در ابتدا ماشین مرد خسته، دهمین ماشین در صف اول است. اگر ماشین مرد خسته X امین ماشینی باشد که وارد جایگاه می‌شود، امید ریاضی و واریانس X را محاسبه کنید (فرض کنید صف‌ها طول نامتناهی دارند).

سؤال ۸ برای این سوال نیاز است که نوت‌بوک مرتبط با تمرین عملی را که به پیوست این فایل آمده است کامل نمایید و به همراه فایل پاسخ سوالات تئوری به صورت یک فایل zip بارگذاری کنید.

هدف این سوال آشنایی با توزیع‌های برنولی، دوجمله‌ای و پواسون و ارتباط آن‌ها با یکدیگر است. برای این سوال تنها می‌توانید از کتابخانه‌ها و توابع مرتبط با آن‌ها که در ابتدای نوت‌بوک آمده است، استفاده نمایید.

در ابتدا از توزیع برنولی با پارامتر p ، ۱۰۰۰ مرتبه خروجی را تولید نمایید و نمودار تعداد دفعات موفقیت آزمایش را نمایش دهید. سپس با استفاده از آزمایش برنولی، آزمایش دوجمله‌ای با پارامتر p و n را پیاده‌سازی کنید. به ازای n های مختلفی که داده شده است، آزمایش توزیع دوجمله‌ای به تعداد ۱۰۰۰ بار تکرار کنید و نتایج را به ازای n های مختلف، در نمودارهای متناظر رسم نمایید. خروجی مورد نظر برای آزمایش دوجمله‌ای، برای هر یک از ۱۰۰۰ آزمایش برابر با تعداد موفقیت‌های آزمایش از بین n تکرار برنولی است.

در بخش آخر با استفاده از توزیع پواسون با پارامتر $\lambda = 500$ ، ۱۰۰۰ مرتبه خروجی را تولید کنید. سپس برای n های مختلف داده شده، مقدار p متناظر برای توزیع دوجمله‌ای را به گونه‌ای قرار دهید که $np = \lambda$ شود و هر یک از آن‌ها را ۱۰۰۰ مرتبه تکرار کنید. در نهایت به ازای هر کدام از n ها، خروجی هر دو توزیع دوجمله‌ای و پواسون را در یک نمودار رسم نمایید. در پایان توضیح مختصری از مشاهدات خود را ارائه دهید.