



دانشکده‌ی علوم ریاضی

مدرس: دکتر شهرام خزایی

احتمال و کاربرد آن

تمرین سری دوم

مهلت ارسال: ۱۷ فروردین

گردآورنده: مهدی مستانی

- پاسخ‌های خود را در قالب یک فایل PDF با نام HW2-ID ارسال نمایید که ID شماره‌ی دانشجویی شما می‌باشد.
- یادآوری می‌شود که در اختیار دادن راه‌حل‌های مکتوب به سایر دانشجویان و یا منتشر کردن آن در اینترنت یا شبکه‌های اجتماعی غیر مجاز است و عواقب آن بر عهده نویسنده پاسخ است.
- مشورت در تمرین‌ها مجاز است و توصیه می‌شود اما هر دانش‌جو موظف است که تمرین را به تنهایی انجام دهد و راه‌حل نهایی ارسال شده باید توسط خود دانش‌جو نوشته شده باشد. در صورت مشاهده‌ی هر گونه تخلف، نمره‌ی تمام تمرینات شخص خاطی صفر لحاظ خواهد شد.
- تمریناتی که به صورت دست‌نویس تحویل داده می‌شوند، باید به صورت کاملاً خوانا نوشته شود و با کیفیتی مطلوب و حجم پایین، اسکن و ارسال شود.
- از بین سوالات ۵ و ۶، تنها یک سوال را تحویل دهید.

سؤال ۱  $n$  سکه در اختیار داریم که احتمال خط آمدن سکه‌ی  $i$ -ام برابر با  $\frac{i}{n}$  است. یک سکه را به صورت کاملاً تصادفی انتخاب می‌کنیم و آن را پرتاب می‌کنیم. حاصل پرتاب خط می‌شود. احتمال آن‌که سکه‌ی پرتاب شده سکه‌ی  $j$ -ام باشد ( $1 \leq j \leq n$ ) باشد چقدر است؟

سؤال ۲  $n$  سبد داریم که هر کدام شامل  $a$  توپ سفید و  $b$  توپ مشکی هستند. به صورت کاملاً تصادفی یک توپ از سبد اول بر می‌داریم و به سبد دوم انتقال می‌دهیم. سپس یک توپ را به صورت کاملاً تصادفی از سبد دوم بر می‌داریم و به سبد سوم انتقال می‌دهیم و این کار را تا آخرین سبد انجام می‌دهیم. در نهایت یک توپ به صورت کاملاً تصادفی از سبد آخر انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که توپ انتخاب شده سفید باشد چقدر است؟

سؤال ۳ فرض کنید که پیشامد های  $C_1, C_2, \dots, C_n$  افزایشی از فضای نمونه باشند. از طرفی فرض کنید که دو پیشامد  $A$  و  $B$  وجود دارد که برای هر  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  داریم:

- پیشامد  $B$  نسبت به  $C_i$  مستقل است.
  - پیشامدهای  $A$  و  $B$  به شرط  $C_i$  مستقل هستند.
- ثابت کنید که  $A$  و  $B$  پیشامد های مستقل نسبت به یکدیگرند.

**سؤال ۴** سکه‌ی سالمی را در اختیار داریم. علی و محمد به صورت متوالی، به ترتیب  $n + 1$  مرتبه و  $n$  مرتبه سکه را پرتاب می‌کنند. احتمال این‌که علی بیشتر از محمد شیر بیاورد چقدر است؟

**سؤال ۵** بیماری ارثی  $X$  بدین صورت است که اگر مادری به آن مبتلا باشد، هر یک از فرزندانش مستقلاً با احتمال  $p$  به بیماری  $X$  مبتلا خواهند بود. شیدا مادر دو فرزند است. اگر مادر بزرگ مادری شیدا به بیماری  $X$  مبتلا بوده باشد، احتمال این‌که دقیقاً یکی از فرزندان شیدا به بیماری  $X$  مبتلا باشند را محاسبه کنید.

**سؤال ۶** یک جفت تاس (یکی آبی یکی قرمز) را آن‌قدر پرتاب می‌کنیم تا دقیقاً یکی از اعداد رو شده شش باشد، بعد به رنگ تاس با مقدار ۶ نگاه می‌کنیم. فضای نمونه‌ای را با  $\{\text{red, blue, never}\}$  نشان دهید و احتمال هر یک از برآمدها را به دو روش زیر محاسبه کنید:

الف) بدون تعریف استقلال و با فرض هم‌شانس بودن فضای نمونه‌ای  $36^n$  عضوی آزمایش پرتاب یک جفت تاس به تعداد  $n$  بار.

ب) با تعریف استقلال و مستقل بودن پرتاب‌های تاس ایده‌آل. احتمال برآمد never را با قضیه پیوستگی احتمال محاسبه کنید و نشان دهید صفر است.