دانشکده‌ی علوم ریاضی

احتمال و کاربرد آن مدرس: دکتر شهرام خزایی

پاسخ تمرین سری دوم

گردآورنده : مهدی مستانی مهلت ارسال : ۱۷ فروردین

پرسش ۱

پیشامد خط آمدن سکه‌ی پرتاب‌شده را A می‌نامیم. همچنین به ازای هر $n \geq i \geq ۱$، پیشامد اینکه سکه‌ی پرتاب‌شده، سکه‌ی iام باشد را با B_i نمایش می‌دهیم. پس در واقع، می‌خواهیم $\Pr(B_j|A)$ را محاسبه کنیم. از آن‌جایی که $\{B_۱, B_۲, ..., B_n\}$ یک افراز از فضای نمونه‌ای هستند، پس طبق قانون بیز داریم:

$$\Pr(B_j|A) = \frac{\Pr(B_j)\Pr(A|B_j)}{\sum_{i=۱}^{n}\Pr(B_i)\Pr(A|B_i)}$$

همچنین، از آن‌جایی که یکی از این سکه‌ها به صورت کاملا تصادفی انتخاب می‌شود، پس به ازای هر $n \geq i \geq ۱$، داریم که $\Pr(B_i) = \frac{۱}{n}$ است. علاوه بر این، طبق فرضیات مسئله می‌دانیم احتمال خط آمدن سکه‌ی iام برابر $\frac{i}{n}$ است. پس $\Pr(A|B_i) = \frac{i}{n}$ می‌باشد. بنابراین، طبق رابطه‌ی بالا داریم:

$$\Pr(B_j|A) = \frac{\frac{۱}{n}\cdot\frac{j}{n}}{\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{n}\cdot\frac{i}{n}} = \frac{\frac{j}{n^۲}}{\frac{۱}{n^۲}\cdot\sum_{i=۱}^{n} i} = \frac{۲j}{n(n+۱)}$$

پس احتمال آن‌که سکه‌ی پرتاب‌شده سکه‌ی jام باشد، برابر با $\frac{۲j}{n(n+۱)}$ است. ■

پرسش ۲

ادعا میکنیم همواره این احتمال برابر $\frac{a}{a+b}$ است. این ادعا را با استقرا روی n ثابت می‌کنیم.
برای پایه $n = ۱$ حکم برقرار است زیرا تغییری در تنها سبد رخ نمیدهد و a توپ سفید داشته پس به احتمال $\frac{a}{a+b}$ توپی که برمی‌داریم سفید است.
حال فرض میکنیم برای $n - ۱$ حکم برقرار است؛ یعنی به ازای سبد، احتمال سفید بودن توپ انتخاب شده از سبد آخر $\frac{a}{a+b}$ است.
برای n سبد، فرض کنید:
A: پیشامد برداشتن توپ سفید از سبد $n - ۱$ ام برای انتقال به سبد آخر باشد.
B: پیشامد سفید بودن توپ انتخابی از سبد آخر باشد.
طبق قضیه ای که در کلاس اثبات شد

$$P(B) = P(BA) + P(BA^C)$$

. طبق احتمال شرطی

$$P(BA) = P(A)P(B|A).$$

طبق فرض استقرا، $P(A) = \frac{a}{a+b}$. همچنین، اگر توپ سفیدی به سبد آخر اضافه شده باشد احتمال اینکه توپ سفید برداریم برابر میشود با $\frac{a+1}{a+b+1}$ پس

$$P(BA) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a+1}{a+b+1}$$

مشابها برای BA^C داریم

$$P(BA^C) = (1 - \frac{a}{a+b}) \cdot \frac{a}{a+b+1} = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b+1}$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)} + \frac{ba}{(a+b)(a+b+1)}$$

$$= \frac{a(a+1+b)}{(a+b)(a+b+1)} = \frac{a}{a+b}.$$

پس حکم برای n برقرار است و اثبات کامل شد. ■

پرسش ۳

از فرض سوال داریم که

$$P(B|C_i) = P(B)\ ,\ P(AB|C_i) = P(A|C_i)P(B|C_i) \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

از دو فرض فوق نتیجه می‌شود که :

$$P(AB|C_i) = P(A|C_i)P(B) \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

حال اگر از قانون احتمال کل و نتیجه‌ی فوق استفاده کنیم خواهیم داشت:

$$P(AB) = \sum_{i=1}^{n} P(AB|C_i)P(C_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B)P(A|C_i)P(C_i)$$

$$= P(B)\sum_{i=1}^{n} P(A|C_i)P(C_i) = P(B)P(A)$$

و بدین ترتیب حکم ثابت می‌شود. ■

پرسش ۴

فضای نمونه‌ای این آزمایش را به صورت زوج مرتب‌های $\{S_۱, S_۲\}$ تعریف می‌کنیم که $S_۱$ جایگشتی $n+۱$ حرفی معادل وضعیت سکه‌های علی و $S_۲$ جایگشتی n حرفی معادل وضعیت سکه‌های محمد می‌باشد.
پیشامد A را معادل اینکه تعداد شیرهای $S_۱$ بیشتر از تعداد شیرهای $S_۲$ باشد تعریف می‌کنیم.
ادعا می‌کنیم که با توجه به فضای نمونه‌ای تعریف شده، $|A^C| = |A|$ است. برای اثبات داریم که پیشامد A^C در واقع معادل حالاتی است که تعداد شیرهای $S_۲$ بیشتر یا مساوی تعداد شیرهای $S_۱$ باشد. نشان می‌دهیم که تناظری یک به یک بین پیشامد A و پیشامد A^C برقرار است. فرض کنید $\{S_۱, S_۲\} \in A$ باشند به طوری که $S_۱$ دارای $k_۱$تا شیر و $S_۲$ دارای $k_۲$تا شیر باشد. می‌دانیم $k_۱ > k_۲$ است. حال، ادعا می‌کنیم که در صورتی که شیر و خط‌های جایگشت‌های $S_۱$ و $S_۲$ را برعکس کنیم(یعنی هر سکه‌ای که شیر آمده بوده خط بیاید و برعکس)، به زوج مرتبی مانند $\{S'_۱, S'_۲\} \in A^C$ خواهیم رسید. از آن‌جایی که $S_۱$ جایگشتی $n+۱$ حرفی و $S_۲$ جایگشتی n حرفی بوده است، پس $S'_۱$ دارای $n+۱-k_۱$ و $S'_۲$ دارای $n-k_۲$ شیر خواهد بود. داریم:

$$k_۱ > k_۲ \implies k_۱ \geq k_۲ + ۱ \implies n + ۱ - k_۱ \leq n - k_۲$$

پس با برعکس کردن شیر و خط‌ها، به جایگشت گفته شده خواهیم رسید. همچنین، به وضوح این تناظر یک به یک است و بدین ترتیب ادعا ثابت گردید.
حال، از آن‌جایی که فضای نمونه‌ای تعریف شده متناهی و هم‌شانس است، پس $\Pr(A) = \Pr(A^C)$ خواهد بود و چون $\Pr(A) + \Pr(A^C) = ۱$ است، خواهیم داشت که $\Pr(A) = \frac{۱}{۲}$ می‌باشد. ■

پرسش ۵

پیشامد A را معادل بیمار بودن دقیقا یکی از فرزندان شیدا، پیشامد B را معادل بیمار بودن خود شیدا و پیشامد C را معادل بیمار بودن مادر شیدا تعریف می‌کنیم. می‌دانیم مادربزرگ شیدا بیمار بوده است. پس $\Pr(C) = p$ است. حال، طبق اصل سوم کولموگروف داریم:

$$\Pr(B) = \Pr(BC) + \Pr(BC^C) \tag{۱}$$

بنابر فرضیات مسئله می‌دانیم در صورتی که مادر بیمار نباشد، فرزندان آن نیز بیمار نخواهند بود. پس $\Pr(BC^C) = ۰$ است. حال، طبق تعریف احتمال شرطی، رابطه‌ی (۱) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\Pr(B) = \Pr(BC) = \Pr(B|C) \cdot \Pr(C) = \Pr(B|C) \cdot p \tag{۲}$$

همچنین، طبق فرض مسئله $\Pr(B|C) = p$ است و نتیجتا از رابطه‌ی (۲) به دست می‌آوریم که $\Pr(B) = p^۲$ می‌باشد. حال، طبق اصل سوم کولموگروف داریم:

$$\Pr(A) = \Pr(AB) + \Pr(AB^C) \tag{۳}$$

بنابر فرضیات مسئله می‌دانیم در صورتی که مادر بیمار نباشد، فرزندان آن نیز بیمار نخواهند بود. پس $\Pr(AB^C) = ۰$ است. حال، طبق تعریف احتمال شرطی، رابطه‌ی (۳) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\Pr(A) = \Pr(AB) = \Pr(A|B) \cdot \Pr(B) = \Pr(A|B) \cdot p^۲ \tag{۴}$$

حال، پیشامد A_i را معادل بیمار بودن فرزند iام شیدا و بیمار نبودن فرزند دیگر او تعریف می‌کنیم. از آن‌جایی که پیشامدهای $A_۱$ و $A_۲$ به شرط B مستقل هستند، داریم:

$$\Pr(A|B) = \Pr(A_۱|B) + \Pr(A_۲|B) = p(۱-p) + p(۱-p) = ۲p(۱-p) \tag{۵}$$

حال با جایگذاری رابطه‌ی (۵) در رابطه‌ی (۴) خواهیم داشت:

$$\Pr(A) = ۲p(۱-p) \cdot p^۲ = ۲p^۳(۱-p)$$

پس احتمال اینکه دقیقا یکی از فرزندان شیدا بیمار باشند، برابر با $۲p^۳ - ۲p^۴$ است. ■

پرسش ۶

الف) B_n را پیشامدی در نظر می‌گیریم که تاس‌ها را n بار پرتاب کنیم تا تنها تاس قرمز ۶ بیاید. به دست می‌آید که $P(R_n) = \frac{۲۶^{n-۱}.۵}{۳۶^n}$ است. حال احتمال این که خروجی ما red شود برابر است با:

$$P(red) = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲۶^{n-۱}.۵}{۳۶^n} = \frac{۵}{۳۶}\sum_{n=۰}^{\infty}(\frac{۲۶}{۳۶})^n = \frac{۱}{۲}$$

مشابها برای پیشامد $blue$ نیز به دست می‌آید که $P(blue) = \frac{۱}{۲}$ است و در نتیجه $P(never) = ۰$ خواهد بود.
ب) احتمال این‌که در پرتاب اول تنها تاس قرمز ۶ بیاید برابر با $\frac{۵}{۳۶}$ است و از طرفی احتمال این‌که دقیقا یکی از تاس‌ها ۶ نیاید برابر با $\frac{۲۶}{۳۶}$ است. حال اگر در پرتاب اول قرمز بیاید که تمام است و خروجی red است اما اگر دقیقا یکی از تاس‌ها ۶ نباشد، آن‌گاه با توجه به استقلال پرتاب تاس‌ها مجدد احتمالات رخ‌دادهای فوق همان است و بنابراین می‌توان نوشت:

$$P(red) = \frac{۵}{۳۶} + \frac{۲۶}{۳۶}.P(red) \to P(red) = \frac{۱}{۲}$$

مشابها به دست می‌آید که $P(blue) = \frac{۱}{۲}$ است و در نتیجه $P(never) = ۰$ خواهد بود.
اگر پیشامد A_n را بدین صورت تعریف کنیم که ما تا مرحله‌ی n ام متوقف نشده باشیم، داریم که $P(A_n) = (\frac{۲۶}{۳۶})^n$ خواهد بود و نیز پیشامدهای A_i تو در تو هستند. بنابراین خواهیم داشت که:

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n)$$

از طرفی داریم که $\lim_{n\to\infty} A_n = never$ است و در نتیجه خواهیم داشت:

$$P(never) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty}(\frac{۲۶}{۳۶})^n = ۰$$

با تشکر از خانم‌ها موسوی و محمدی