



مدرس: دکتر شهرام خزایی

احتمال و کاربرد آن

## تمرین سری چهار

مهلت ارسال : ۲۱ اردیبهشت

گردآورنده : آرمان کشازرع

- پاسخ‌های خود را در قالب یک فایل PDF با نام HW4-ID ارسال نمایید که ID شماره‌ی دانشجویی شما می‌باشد.
- یادآوری می‌شود که در اختیار دادن راه‌حل‌های مکتوب به سایر دانشجویان و یا منتشر کردن آن در اینترنت یا شبکه‌های اجتماعی غیر مجاز است و عواقب آن بر عهده نویسنده پاسخ است.
- مشورت در تمرین‌ها مجاز است و توصیه می‌شود اما هر دانشجو موظف است که تمرین را به تنهایی انجام دهد و راه‌حل نهایی ارسال شده باید توسط خود دانشجو نوشته شده باشد. در صورت مشاهده‌ی هر گونه تخلف، نمره‌ی تمام تمرینات شخص خاطی صفر لحاظ خواهد شد.
- تمریناتی که به صورت دست‌نویس تحویل داده می‌شوند، باید به صورت کاملاً خوانا نوشته شود و با کیفیتی مطلوب و حجم پایین، اسکن و ارسال شود.
- از بین سوالات ۱ تا ۶ چهار سوال را به دلخواه انتخاب کنید و آن‌ها را تحویل دهید.

سؤال ۱ طول عمر ریزپردازنده‌های تولیدی یک کارخانه از توزیع نرمال با میانگین  $\mu = 1.4 \times 10^6$  و واریانس  $\sigma^2 = 9 \times 10^{10}$  ساعت پیروی می‌کند. احتمال اینکه در یک دسته ۲۰۰ تایی از این ریزپردازنده‌ها حداقل ۲۰ تا با طول عمر کمتر از  $1.8 \times 10^6$  موجود باشد، تقریباً چقدر است؟

سؤال ۲ (آ) می‌خواهیم یک ایستگاه آتش‌نشانی را در جاده‌ای به طول  $A < \infty$  تاسیس کنیم. فرض کنید حریق با توزیع یکنواخت در بازه  $[0, A]$  رخ می‌دهد. ایستگاه را در چه مکانی تاسیس کنیم تا امید فاصله تا حریق کمینه شود؟ در واقع نقطه  $a$  را بیابید که  $E[|X - a|] : X \sim Uni[0, A]$  را کمینه کند.

(ب) حالا فرض کنید  $A = \infty$ ، یعنی جاده نامتناهی است. اگر فاصله حریق از ابتدا جاده از توزیع نمایی با نرخ  $\lambda$  پیروی کند. حالا ایستگاه را کجا تاسیس کنیم که امید فاصله‌اش تا حریق کمینه شود؟

سؤال ۳ (آ) فرض کنید تعداد رخدادها در یک بازه زمانی از توزیع پواسون با پارامتر  $\lambda$  پیروی کند. هر کدام از این رخدادها مستقل از هم و به احتمال  $p_i$  از نوع  $i$  هستند، به طوری که  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ .

نشان دهید تعداد رخدادهای از نوع  $i$ ، توزیع پواسون با نرخ  $\lambda p_i$  دارند.

(ب) تعداد خودروهای تولیدی شرکت سایپا، دارای توزیعی پواسون با نرخ ۱۳۰۰ دستگاه در روز هستند. اگر هر

خودرو به احتمال ۱۰٪ دارای خرابی باشد، امید ریاضی و واریانس زمان ورود ۲۰۰۰ امین خودرو مشکل دار به بازار را محاسبه کنید.

سؤال ۴ فرض کنید  $X$  متغیری تصادفی با توزیع یکنواخت روی  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  باشد، و  $Y$  متغیری برنولی با پارامتر  $\frac{1}{2}$  و مستقل از  $X$  باشد. توزیع توام  $Z = X + Y$  و  $W = X - Y$  را بدست آورید. و از روی آن توزیع‌های حاشیه‌ای  $Z$  و  $W$  را محاسبه کنید. آیا این دو متغیر مستقلند؟

سؤال ۵ (آ) یک جمع  $n$  نفری تصمیم به بازی اسم فامیل (اسم شهر) می‌گیرند. هر کدام مستقلاً و بدون تقلب از دیگری کلمات را می‌نویسند. اگر برای نفر  $i$  ام زمانی که طول می‌کشد تا در یک دور از بازی، تمام کلمات را بنویسد از متغیر نمایی با پارامتر  $\lambda_i$  پیروی کند، امید ریاضی و واریانس طول هر دور چقدر است؟  
(ب) بعد از اینکه اولین نفر تمام کلمات را نوشت، نیاز است امتیازات شمرده شود. چون متین و عارف دانشجوی دانشکده ریاضی هستند، بقیه از آن‌ها می‌خواهند تا امتیازهای همه‌شان را جمع بزنند. اما چون به دقت هیچکدام اعتماد ندارند، صبر می‌کنند تا شمارش هردو تمام شود و سپس حاصل جمع‌هایشان را باهم مقایسه کنند. فرض می‌کنیم زمانی که متین و عارف نیاز دارند تا امتیازات همه را جمع بزنند، مستقل باشد و از توزیع‌های نمایی به ترتیب با پارامترهای  $\lambda$  و  $\mu$  پیروی کند. به طور میانگین بعد از پایان یک دور، شمردن امتیازات چقدر طول می‌کشد؟

سؤال ۶ فرض کنید  $X$  یک متغیر تصادفی پیوسته با توزیع تجمعی  $F_X$  است. حال قرار دهید  $Y = F_X(X)$ . نشان دهید که  $Y$  هم توزیع با  $Uni(0, 1)$  است.

سؤال ۷ (عملی) برای این سوال نیاز است که فایل python مرتبط با این تمرین عملی را که به پیوست این فایل آمده است کامل کنید و به همراه فایل پاسخ سوالات تئوری به صورت یک فایل zip بارگذاری کنید.  
عارف در خوابگاه و در مختصات  $(0, 0)$  قرار دارد. با توجه به اینکه حوصله‌اش سررفته، تصمیم می‌گیرد کمی پیاده‌روی کند. اما چون تصمیم‌گیری برایش سخت است، مسیر حرکتش را به شانس واگذار می‌کند.  
عارف که دوست ندارد خیلی از تختش دور شود، مایل است بداند امید ریاضی بیشترین فاصله‌ای که از تختش می‌گیرد چقدر است. عارف همچنین این ترم آنالیز ریاضی دارد و مایل است این فاصله را با متریک‌های مختلف محاسبه کند.

(آ) یک دسته کارت ۵۲ تایی (۲۶ تا قرمز و ۲۶ تا سیاه) را بر می‌زند. هربار کارت رویی را برمی‌گرداند، اگر سیاه بود یک واحد به راست می‌رود و اگر کارت قرمز بود، یک واحد به چپ. (در محور  $x$  حرکت می‌کند).  
(ب) حالا دو دسته کارت ۵۲ تایی را بر می‌زند. هربار کارت رویی هر دو دسته را برمی‌دارد. سیاه و قرمز بودن کارت دسته اول جهت یک واحد حرکت وی در محور  $x$  و سیاه و قرمز بودن کارت دسته دوم بصورت مستقل جهت یک واحد حرکت وی در محور  $y$  را مشخص می‌کند.

در قسمت ب فاصله را یکبار با متریک منهن  $(d(x, y) = |x| + |y|)$  و بار دیگر با متریک اقلیدسی  $(d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2})$  محاسبه کنید.

پ.ن. با توجه به برابر بودن کارت‌های قرمز و سیاه، عارف همیشه نهایتاً به تختش برمی‌گردد اما متغیر مورد سوال، بیشترین فاصله‌ای است که طی این گذر بسته از تختش خواهد داشت.

هدف سوال: در بسیاری از سوالات محاسبه دقیق و تئوری امید ریاضی ممکن است دشوار باشد. (حتی برای عارف که دستیار آموزشی قهاری است) در چنین حالت‌هایی می‌توان از کامپیوتر کمک گرفت. اما در سوالاتی مثل سوال

بالا با توجه به بزرگ بودن فضای نمونه  $\binom{52}{26}^2$  محاسبه دقیق حتی برای کامپیوترها هم دشوار و زمان‌بر است. در این مواقع است که از شبیه‌سازی متغیر مورد سوال، نمونه‌گیری‌های پیاپی و محاسبه میانگین نمونه‌ها استفاده می‌کنیم تا بصورت تقریبی امید ریاضی‌اش را پیدا کنیم.