



دانشکده‌ی علوم ریاضی

مدرس: دکتر شهرام خزایی

احتمال و کاربرد آن

تمرین سری یک

مهلت ارسال: ۲۵ اسفند

گردآورنده: الهه توحیدی

- پاسخ‌های خود را در قالب یک فایل PDF با نام Hw1-ID ارسال نمایید که ID شماره‌ی دانشجویی شما می‌باشد.
 - یادآوری می‌شود که در اختیار دادن راه‌حل‌های مکتوب به سایر دانشجویان و یا منتشر کردن آن در اینترنت یا شبکه‌های اجتماعی غیر مجاز است و عواقب آن بر عهده نویسنده پاسخ است.
 - مشورت در تمرین‌ها مجاز است و توصیه می‌شود اما هر دانش‌جو موظف است که تمرین را به تنهایی انجام دهد و راه‌حل نهایی ارسال شده باید توسط خود دانش‌جو نوشته شده باشد. در صورت مشاهده هر گونه تخلف، نمره‌ی تمام تمرینات شخص خاطی صفر لحاظ خواهد شد.
 - تمریناتی که به صورت دست‌نویس تحویل داده می‌شوند، باید به صورت کاملاً خوانا نوشته شود و با کیفیتی مطلوب و حجم پایین، اسکن و ارسال شود.
 - در این تمرین، نمی‌توانید از مفهوم استقلال پیشامدها استفاده نمایید و سوالات بدون نیاز به این مفهوم قابل انجام است. در صورت نیاز می‌توانید از مفاهیم احتمال شرطی استفاده نمایید.
- سؤال ۱** دو عدد تاس سالم در دست داریم و آن‌ها را هم‌زمان آن‌قدر می‌اندازیم تا مجموع دو عدد رو شده در یک مرحله ۵ یا ۷ شود. چه قدر احتمال دارد که با رخ دادن مجموع ۵ متوقف شویم؟ فضای نمونه‌ای را مشخص کنید و تابع احتمالی که به آن نسبت می‌دهید را به نحو مناسبی توجیه کنید.
- سؤال ۲** فرض کنید به شما یک تکه چوب به طول یک داده شده است و شما آن را به صورت کاملاً تصادفی به سه قسمت تقسیم می‌کنید. احتمال این‌که شما بتوانید به وسیله‌ی این سه تکه چوب یک مثلث بسازید چقدر است؟
- سؤال ۳** فرض کنید که اعداد a_1, a_2, \dots, a_n جایگشتی کاملاً تصادفی از اعداد ۱ تا n باشند. چقدر احتمال دارد که هیچ یک از اعداد
- $$S_1 = a_1, S_2 = S_1 + a_2, \dots, S_n = S_{n-1} + a_n$$
- بر ۳ بخش پذیر نباشند؟
- سؤال ۴** ۲۰۰ نفر به ترتیب وارد هواپیمایی با دقیقاً ۲۰۰ صندلی می‌شوند. شماره‌ی صندلی هر نفر در بلیط آن فرد مشخص شده است و شماره‌ی صندلی هر فرد متمایز است. نفر اول بلیط خود را گم کرده است. در نتیجه از بین تمام صندلی‌ها با احتمال برابر، یک صندلی را به صورت تصادفی انتخاب می‌کند و می‌نشیند. در ادامه نفرات بعدی اگر صندلی خودشان خالی باشد، در جای خود می‌نشینند در غیر این صورت، از بین صندلی‌های خالی، به احتمال برابر یک صندلی را به تصادف انتخاب می‌کنند و آن‌جا می‌نشینند. احتمال آن‌که نفر آخر روی صندلی خود بنشیند چقدر است؟

سؤال ۵ تیراندازی می‌خواهد به هدف خود شلیک کند. فرض کنید می‌خواهیم محدوده‌ی شلیک او را با صفحه‌ی مختصات دو بعدی مدل کنیم به این معنا که او به هر جایی می‌تواند شلیک کند. همین‌طور فرض کنید که اگر تیر او در فاصله‌ی اقلیدسی d از مبدا قرار داشته باشد، داریم:

$$\mathbb{P}(d \leq r_0) = 2\mathbb{P}(r_0 < d \leq 2r_0) = 4\mathbb{P}(2r_0 < d \leq 3r_0) = \dots$$

هم‌چنین فرض کنید چنان‌چه تیر به ناحیه‌ای که در فاصله‌ی $mr_0 < d \leq (m+1)r_0$ قرار دارد، برخورد کند، این اتفاق به‌صورت کاملاً تصادفی رخ می‌دهد (یعنی زیر مجموعه‌های با مساحت یکسان شانس برابری داشته باشند). احتمال این که هدف شلیک، درون مربعی که مختصات رئوس آن در زیر آمده است، قرار گیرد چقدر است؟

$$(2r_0, 2r_0), (2r_0, -2r_0), (-2r_0, 2r_0), (-2r_0, -2r_0)$$