دانشکدهٔ علوم ریاضی

احتمال و کاربرد آن — مدرس: دکتر شهرام خزایی

تمرین سری شش

گردآورنده: محمدحسین کلانتری — مهلت ارسال: ۱ تیر

- پاسخ‌های خود را در قالب یک فایل PDF با نام HW6-ID ارسال نمایید که ID شمارهٔ دانشجویی شما است.
- یادآوری می‌شود که در اختیار دادن راه‌حل‌های مکتوب به سایر دانشجویان و یا منتشر کردن آن در اینترنت یا شبکه‌های اجتماعی غیرمجاز است و عواقب آن بر عهدهٔ نویسنده پاسخ است.
- مشورت در تمرین‌ها مجاز است و توصیه می‌شود اما هر دانش‌جو موظف است که تمرین را به تنهایی انجام دهد و راه‌حل نهایی ارسال‌شده **باید توسط خود دانش‌جو** نوشته شده باشد. در صورت مشاهدهٔ هر گونه تخلف، نمرهٔ تمام تمرینات شخص خاطی صفر لحاظ خواهد شد.
- تمریناتی که به صورت دست‌نویس تحویل داده می‌شوند، باید به صورت کاملاً خوانا نوشته شود و با کیفیتی مطلوب و حجم پایین، اسکن و ارسال شود.

پرسش ۱

آیا می‌توان کران نابرابری چبیشف را (برای متغیرهای تصادفی غیربدیهی) بهبود داد؟ در قسمت ۱ این پرسش باید نشان دهید جواب، وقتی همه‌ی متغیرهای تصادفی را در نظر می‌گیریم، منفی است. امّا اگر متغیرهای تصادفی‌ای که توزیع خاصی دارند را در نظر بگیریم، شاید بتوان نابرابری را بهبود داد. هدف این پرسش همین است. در قسمت آخر این پرسش مقایسه‌ای انجام می‌دهید که نشان می‌دهد کران بدست آمده جدید چقدر بهتر است.

۱. (۵ نمره) متغیر تصادفی غیرثابت X را مثال بزنید که برای آن $t > 0$ موجود است که:

$$Pr[|X - E[X]| \geq t] = \frac{Var[X]}{t^2}.$$

(راهنمایی: متغیر تصادفی گسسته‌ای وجود دارد که فقط ۳ مقدار می‌گیرد و در تساوی بالا صدق می‌کند.)

۲. (۵ نمره) فرض کنید X یک متغیر تصادفی باشد که $M_X(s)$ در بازه‌ی بازی حول ۰ قابل تعریف باشد. نشان دهید به ازای هر $a \in \mathbb{R}$ و هر $s > 0$ در دامنه‌ی تعریف M_X داریم:

$$Pr[X \geq a] \leq \frac{M_X(s)}{e^{sa}}.$$

۳. (۵ نمره) فرض کنید X یک متغیر تصادفی برنولی با پارامتر p باشد. $M_X(s)$ را محاسبه کنید و نشان دهید به ازای هر $s \in \mathbb{R}$ داریم:

$$M_X(s) \le e^{p(e^s-۱)}.$$

۴. (۱۰ نمره) فرض کنید $X_۱, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل باشند و همچنین به ازای هر $۱ \le i \le n$ متغیر X_i برنولی با پارامتر p باشد و $Y = X_۱ + \cdots + X_n$ و $\mu = np$. (در قسمت‌های بعد این پرسش نیز این فرض‌ها برقرارند.) به ازای هر $\delta > ۰$ نشان دهید:

$$Pr[Y \ge (۱+\delta)\mu] \le \left(\frac{e^\delta}{(۱+\delta)^{۱+\delta}}\right)^\mu.$$

(راهنمایی: طرف چپ نابرابری قسمت ۲ به s وابسته نیست.)

۵. (۵ نمره) به ازای هر $\delta > ۰$ نشان دهید:

$$Pr[Y \ge (۱+\delta)\mu] \le e^{-\frac{\delta^۲}{۲+\delta}\mu}.$$

(راهنمایی: می‌توانید از نابرابری زیر که به ازای هر $x > ۰$ برقرار است، استفاده کنید:

$$\ln(۱+x) \ge \frac{x}{۱+\frac{x}{۲}}.$$

اثبات این نابرابری با استفاده از مشتق‌گیری است. نیازی نیست آن را اثبات کنید.)

۶. (۵ نمره) به طور مشابه می‌توان نشان داد به ازای هر $۰ < \delta < ۱$ داریم:

$$Pr[Y \le (۱-\delta)\mu] \le e^{\frac{-\mu\delta^۲}{۲}}.$$

نیازی به اثبات این نابرابری نیست. نشان دهید به ازای هر $۰ < \delta < ۱$ داریم:

$$Pr[|Y-\mu| \ge \delta\mu] \le ۲e^{\frac{-\mu\delta^۲}{۳}}.$$

۷. (۵ نمره) فرض کنید $p = ۰/۵$. قرار دهید $S = \frac{Y}{n}$. با در نظر گرفتن این متغیر تصادفی, کران بالای بدست آمده در قسمت ۶ را با کران بالای چبیشف بطور مختصر مقایسه کنید.

پرسش ۲

فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف ساده و بدون جهت باشد. مقدار $|E| = m$ را می‌دانیم و می‌خواهیم $|V| = n$ را تخمین بزنیم. می‌توانیم یالهای گراف را بصورت یکنواخت و تصادفی انتخاب کنیم. همچنین تابع درجه را می‌توانیم به راحتی محاسبه کنیم. فرض کنید $d \ge ۱$ و به ازای هر $u \in V$ داریم $۱ \le deg(u) \le d$. فضای نمونه، مجموعه‌ی راس‌های G یعنی V است. یک عضو از V بصورت زیر نمونه‌برداری میشود:

- یک یال بصورت یکنواخت انتخاب می‌شود،

- یک سر یال بصورت یکنواخت انتخاب می‌شود.

این نمونه‌برداری، توزیع احتمالی روی V ایجاد می‌کند.

۱. (۵ نمره) فرض کنید $u \in V$. احتمال انتخاب u را محاسبه کنید.

۲. (۵ نمره) متغیر تصادفی X را که به ازای هر راس u داریم $X(u) = \frac{2m}{deg(u)}$ در نظر بگیرید. $E[X]$ را محاسبه کنید.

۳. (۵ نمره) نشان دهید $Var[X] \leq dn^2$.

۴. (۵ نمره) فرض کنید $X_1, \dots, X_s$ متغیرهای تصادفی مستقل باشند و به ازای هر i ، $X_i \sim X$. تعریف می‌کنیم $Y = \frac{1}{s}(X_1 + \cdots + X_s)$. به ازای هر $\epsilon, \delta \in (0, 1]$ با استفاده از نامساوی‌های احتمالاتی، حداقل مقدار s را برحسب d، ϵ و δ بگونه‌ای بدست آورید که:

$$Pr[|Y - n| \geq \epsilon n] \leq \delta.$$

پرسش ۳

۱. (۵ نمره) فرض کنید X یک متغیر تصادفی نامنفی باشد. نشان دهید به ازای هر $k > 0$ و هر $a > 0$ داریم:

$$Pr[X \geq a] \leq \frac{E[X^k]}{a^k}.$$

۲. (۵ نمره) فرض کنید $\{X_n\}_n$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی باشد و X نیز یک متغیر تصادفی باشد. نشان دهید $Pr[\lim_{n\to\infty} X_n = X] = 1$ اگر و فقط اگر به ازای هر $\epsilon > 0$ داشته باشیم

$$\lim_{n\to\infty} Pr[\bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m - X| \geq \epsilon\}] = 0.$$

(راهنمایی: درمورد

$$Pr[\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} \{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \frac{1}{k}\}]$$

چه می‌توان گفت؟)

۳. (۱۰ نمره) فرض کنید $\{X_n\}_n$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی باشد. اگر $k > 0$ موجود باشد که $\sum_{n=1}^{\infty} E[|X_n|^k] < +\infty$ نشان دهید $Pr[\lim_{n\to\infty} X_n = 0] = 1$.

پرسش ۴

رفراندومی برگزار شده و می‌دانیم رای هر فرد به احتمال p آری است.

۱. (۱۰ نمره) فرض کنید $p = 0/5$. با استفاده از قضیه‌ی حد مرکزی تخمین بزنید از بین ۲۵ نفر، با چه احتمالی حداقل ۱۴ نفر رای آری می‌دهند.

۲. (۱۰ نمره) فرض کنید p مجهول و n تعداد افراد رای‌دهنده باشد. $\overline{X}_n$ را نسبت افراد موافق به n در نظر بگیرید. کمترین مقدار n چقدر باشد تا با احتمال ۰/۹ اطمینان داشته باشیم $\overline{X}_n$ از p به اندازه ۰/۰۱ اختلاف دارد؟

پرسش ۵

(۲۰ نمره) فرض کنید $\{X_n\}_n$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی پوآسون با پارامتر ۱ و مستقل باشد. با استفاده از این دنباله و قضیه‌ی حد مرکزی نشان دهید:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

(راهنمایی: به دو شکل باید حدی را محاسبه کنید. جمع تعدادی متغیر پوآسون مستقل چه توزیعی دارد؟ قضیه‌ی حد مرکزی چه می‌گوید؟)

موفق باشید :)