دانشکده‌ی علوم ریاضی

احتمال و کاربرد آن مدرس: دکتر شهرام خزایی

پاسخ تمرین سری اول

سؤال ۱ از ۳۶ حالت ممکن برای دو تاس، ۴ حالت داریم که در آن‌ها مجموع دو تاس ۵ شده و ۶ حالت که مجموع ۷ می‌شود. حالاتی که مجموع ۵ باشد را با F و حالاتی که مجموع ۷ باشد را با S و ۲۶ حالت دیگر را با N نشان می‌دهیم. فضای نمونه به صورت زیر می‌شود:

$$\Omega = \{F,\ S,\ NF,\ NS,\ NNF,\ NNS,\ ...\ ,\ N...NF,\ N...NS,\ ...\ \}$$

این نقاط هم‌شانس نیستند؛ تابع احتمال به صورت زیر است:

$$\mathbb{P}(\overbrace{N...N}^{\text{n تا}}F) = (\frac{۲۶}{۳۶})^n(\frac{۴}{۳۶}) \quad , \quad \mathbb{P}(\overbrace{N...N}^{\text{n تا}}S) = (\frac{۲۶}{۳۶})^n(\frac{۶}{۳۶})$$

توجیه تابع احتمال:

$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{i=۰}^{\infty}(\frac{۲۶}{۳۶})^i(\frac{۴}{۳۶}+\frac{۶}{۳۶}) = \frac{۱۰}{۳۶}\sum_{i=۰}^{\infty}(\frac{۲۶}{۳۶})^i = \frac{۱۰}{۳۶}(\frac{۱}{۱-\frac{۲۶}{۳۶}}) = ۱$$

احتمال فضای نمونه ۱ شد و از تعریف تابع احتمالمان واضح است که برای هرنقطه‌ی x از فضای نمونه:

$$۰ \leqslant \mathbb{P}(x) < ۱$$

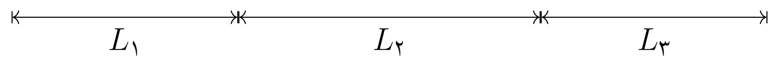
پس برای هر زیرمجموعه Z از فضای نمونه:

$$۰ \leqslant \mathbb{P}(Z)$$

احتمال رخ دادن مجموع ۵ به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=۰}^{\infty}\overbrace{N...N}^{\text{i تا}}F) = \sum_{i=۰}^{\infty}(\frac{۲۶}{۳۶})^i\frac{۴}{۳۶} = \frac{۴}{۱۰} = ۰/۴$$

سؤال ۲ در نظر بگیرید یک چوب به طول ۱ وجود دارد. فرض کنید $X_۱$ و $X_۲$ دو متغیر تصادفی باشند که دو نقطه روی چوب را نشان می‌دهند که در آن نقاط چوب به سه قسمت شکسته می‌شود. فرض می‌کنیم که $X_۱$ و $X_۲$ به طور یکنواخت بر روی بازه $[۰, ۱]$ توزیع شده‌اند. فرض میکنیم $XS \equiv \min(X_۱, X_۲)$ و $XL \equiv \max(X_۱, X_۲)$. طول سه قسمت از سمت چپ چوب را با $L_۱$، $L_۲$ و $L_۳$ نشان می‌دهیم.



ما می‌خواهیم احتمال اینکه L_1، L_2 و L_3 یک مثلث تشکیل دهند را محاسبه کنیم. واضح است که سه قسمت می‌توانند یک مثلث تشکیل دهند اگر طول بلندترین قسمت از مجموع طول‌های دو قسمت دیگر بیشتر نباشد. بیایید به سؤال مکمل اصلی بپردازیم: احتمال اینکه L_1، L_2 و L_3 نتوانند یک مثلث تشکیل دهند چقدر است؟ سه حالت وجود دارد که در آن‌ها سه قسمت نمی‌توانند یک مثلث تشکیل دهند:

- حالت اول: $L_1 \geq L_2 + L_3$

  از آنجا که $L_1 + L_2 + L_3 = 1$، (بدون مثلث از طریق حالت اول)P برابر است با

$$P(L_1 \geq L_2 + L_3) = P(L_1 \geq 1 - L_1) = P(L_1 \geq \frac{1}{2}) = P(XS \geq \frac{1}{2}).$$

توجه داشته باشید که $P(XS \geq \frac{1}{2}) = P(X_1 \text{ و } X_2 \geq \frac{1}{2})$. پس برای X_1 و X_2 داریم

$$P(X_1 \text{ و } X_2 \geq \frac{1}{2}) = P(X_1 \geq \frac{1}{2})P(X_2 \geq \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

- حالت دوم: $L_2 \geq L_1 + L_3$

  (بدون مثلث از طریق حالت دوم)P برابر است با

$$P(L_2 \geq L_1 + L_3) = P(L_2 \geq \frac{1}{2}) = P(XL - XS \geq \frac{1}{2}) = P(|X_1 - X_2| \geq \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}.$$

نشان دادن اینکه $P(|X_1 - X_2| \geq \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ دشوار نیست. به طور هندسی این مساحت رویداد $|X_1 - X_2| \geq \frac{1}{2}$ بر روی یک مربع با طول ضلع ۱ است.

- حالت سوم: $L_3 \geq L_1 + L_2$

  $\frac{1}{4} =$ (بدون مثلث از طریق حالت سوم)P بر اساس تقارن با حالت اول.

از آنجا که سه حالت با هم انحصاری هستند، احتمال اینکه L_1، L_2 و L_3 نتوانند یک مثلث تشکیل دهند برابر است با $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$. بنابراین احتمال اینکه سه قطعه چوب یک مثلث تشکیل دهند برابر است با $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

سؤال ۳ فضای نمونه ما تمام جایگشت های ۱تا n هست که $n!$ نقطه دارد. برای بدست آوردن تعداد اعضای پیشامد بخش‌پذیر نبودن هیچ یک از S_n ها به ۳، S_i ها را $(1 \leqslant i \leqslant n)$ به پیمانه ۳ بررسی می کنیم. S_i به پیمانه ۳ فقط به S_{i-1} و a_i هر دو به پیمانه ۳ بستگی دارد. a_i ای که به ۳ بخش‌پذیر باشد S_{i-1} را به پیمانه ۳ تغییر نمی دهد. پس آنها را کنار گذاشته و بقیه اعضا را می چینیم و در آخر آنها را بین دیگر اعضای دنباله قرار می‌دهیم.
از طرفی داریم که S_n نیز نباید بر ۳ بخش‌پذیر باشد که داریم $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ است. بنابراین نتیجه می‌شود که $n = 3t + 1$ است.

ابتدا ما تمام رشته های متشکل از ۱ و ۲ که جمع هیچ k جمله اولش به ۳ بخش پذیر نیست را می یابیم:
اگر جمله اول ۱ باشد جمله دوم حتما باید ۱ باشد تا به ۳ بخش‌پذیر نباشد، به همین صورت جمله سوم ۲ می‌شود و بقیه جملات یکتا مشخص می شوند. (یکی در میان ۱ و ۲)

$$۱, ۱, ۲, ۱, ۲, ۱, ۲, \ldots \tag{۱}$$

اگر جمله اول ۲ باشد جمله دوم حتما باید ۲ باشد تا به ۳ بخش‌پذیر نباشد، به همین صورت جمله سوم ۱ می‌شود و بقیه جملات یکتا مشخص می شوند. (یکی در میان ۲ و ۱)

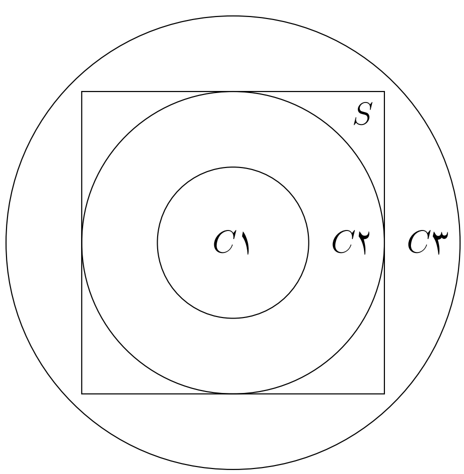
$$۲, ۲, ۱, ۲, ۱, ۲, ۱, \ldots \tag{۲}$$

با توجه به این‌که $n = ۳t + ۱$ است، بنابراین تنها دنباله‌ی از نوع (۱) می‌توانیم داشته باشیم.
پس جواب‌های معتبر بدین صورت هستند از بین $۳t + ۱$ جایگاه موجود، در t از آن‌ها باید مقدار ۰ (که نماینده‌ی اعدادی است که باقیمانده‌ی صفر به پیمانه‌ی ۳ دارند) قرار دهیم به‌طوری که هیچ کدام در خانه‌ی اول نباشند و پس از آن جایگاه اعداد۱ و ۲ نیز به طور یکتا مشخص می‌شود و تنها جایگذاری اعداد مختلف به پیمانه‌های یکسان باقی می‌ماند. اعداد صفر به اندازه‌ی $\binom{۳t}{t}$ است و جایگشت‌ها نیز به هر کدام به ترتیب $t!$، $(t + ۱)!$ و $t!$ است. پس احتمال مورد نظر برابر است با:

$$\frac{t!(t + ۱)!(t)!\binom{۳t}{t}}{(۳t + ۱)!}$$

سؤال ۴ در ابتدا توجه داریم که هنگام نشستن نفر آخر، یا صندلی خودش خالی خواهد بود یا صندلی نفر اول. در غیر این‌صورت اگر صندلی iـ‌ام خالی باشد، آنگاه نفر iـ‌ام ، هنگام نشستن صندلی خودش هم‌چنان خالی بوده اما صندلی دیگری را به تصادف انتخاب کرده‌است که تناقض است.
حال به علت تقارنی که مسئله دارد، صندلی اول و آخر برای مسافران تفاوتی با یکدیگر ندارند و با احتمال برابر توسط مسافران انتخاب می‌شوند. بنابراین نفر آخر به احتمال $\frac{۱}{۲}$ روی صندلی خودش می‌نشیند.

سؤال ۵ بدیهی است که احتمال فضای نمونه ۱ می‌باشد و فضای نمونه در این سوال صفحه‌ی دوبعدی است:
$\Omega = \mathbb{R}^۲$
$\mathbb{P}(\Omega) = ۱ = \mathbb{P}(d \leqslant r_۰) + \mathbb{P}(r_۰ < d \leqslant ۲r_۰) + \mathbb{P}(۲r_۰ < d \leqslant ۳r_۰) + \ldots$
قرار می‌دهیم $\mathbb{P}(d \leqslant r_۰) = A$.
از بالا و با توجه به صورت سوال داریم $۱ = A + \frac{۱}{۲}A + \frac{۱}{۴}A + \ldots$ پس $A = \frac{۱}{۲}$



$\mathbb{P}(d \leqslant r_۰) = \mathbb{P}(C۱) = \frac{۱}{۲}$
$\mathbb{P}(r_۰ \leqslant d \leqslant ۲r_۰) = \mathbb{P}(C۲) = \frac{۱}{۴}$
$\mathbb{P}(۲r_۰ \leqslant d \leqslant ۳r_۰) = \mathbb{P}(C۳) = \frac{۱}{۸}$
چون در C3 زیر مجموعه‌های با مساحت یکسان شانس برابری دارند و احتمال S-(C1+C2) برابر است با نسبت مساحت آن به کل مساحت C3 . مساحت S-(C1+C2) برابر با $(r_۰)^۲(۱۶ - ۴\pi)$ است. احتمال برخورد تیر به S برابر است با:

$$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(C۱) + \mathbb{P}(C۲) + \mathbb{P}(C۳)(\frac{۱۶ - ۴\pi}{۹\pi - ۴\pi}) = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸}(\frac{۱۶ - ۴\pi}{۵\pi}) \approx ۰٫۷۷۷$$

با تشکر از آقای محمد شهاب صبا