دانشکده‌ی علوم ریاضی

احتمال و کاربردها ۲۴ اسفند ۱۳۹۹

تمرین : سری ۲

مدرّسین : دکتر شهرام خزائی و دکتر سحر قاجار *مهلت تحویل ۱۳ فروردین*

- پاسخ‌های خود را در قالب StudentNumber.pdf روی سامانه‌ی درس افزار آپلود کنید.
- تنها فرمت PDF قابل قبول است. از ارسال فایل‌های تصویری و فشرده شده جدا خودداری کنید.
- تمرین‌های مشابه نمره‌دهی نخواهند شد.
- ارسال پاسخ‌ها از طریق ایمیل قابل قبول نیست.
- حداکثر حجم فایل پاسخ‌ها دو مگابایت است. بنابراین توصیه می‌شود پاسخ‌هایتان را تایپ کنید.
- نوشتن تمرینات با استفاده از LaTeX، ۱۰ درصد نمره‌ی اضافه دارد.
- نوشتن حداقل دو سری از تمرینات با استفاده از LaTeX الزامی می‌باشد.
- مهلت تحویل پاسخ‌ها همواره تا ساعت ۲۳:۵۵ تاریخ ذکر شده در صورت تمرین‌هاست .
- ارسال‌های پس از موعد(حداکثر یک هفته)، درصدی از نمره‌ی کامل را دریافت خواهند کرد.
- سوالات خود پیرامون تمرین‌ها را با arashashoori199821@gmail.com و mona.mohammadi78@gmail.com مطرح نمایید.

پرسش ۱

یک نمایشگاه گربه وجود دارد که در این نمایشگاه هر گربه به احتمال 0.6 سالم است. نوید می‌خواهد یک گربه از این نمایشگاه خریداری کند. او می‌خواهد دوستش رضا که دامپزشک ماهری است را با خود همراه ببرد. رضا در صورتی که گربه بیمار باشد به احتمال 0.9 می‌فهمد و در صورتی که سالم باشد به احتمال 0.2 نمی‌فهمد. دو احتمال زیر را محاسبه کنید؛

آ) گربه سالم باشد به شرط آنکه رضا بگوید گربه بیمار است.

ب) گربه بیمار باشد به شرط آنکه رضا بگوید گربه سالم است.

پرسش۲

چهار تاس در جعبه‌ای وجود دارد. یکی ۴ وجهی، یکی ۶ وجهی و دو تای دیگر ۸ وجهی (تاس a وجهی اعداد ۱ تا a را با احتمال برابر نشان می‌دهد). چشم‌هایتان را می‌بندید و یک تاس برمی‌دارید. فرض کنید S تعداد وجه‌های تاس برداشته شده باشد. شما می‌توانید تاس را پرتاب کنید و از فردی که کنار شماست عددی که رو آمده است را بپرسید. فرض کنید R عدد رو آمده باشد.

آ) تابع جرم احتمال R را محاسبه کنید.

ب) $\Pr(S=k|R=3)$ را به ازای k مساوی ۴، ۶ و ۸ محاسبه کنید.

ج) اگر عدد رو آمده ۳ باشد به احتمال بیشتر کدام تاس دست ماست؟ اگر ۶ باشد چطور؟

پرسش ۳

درستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

آ) اگر $\Pr(A|C) \geq \Pr(A|C^{\mathsf{c}})$ و $\Pr(B|C) \geq \Pr(B|C^{\mathsf{c}})$ باشد، آن گاه $\Pr(AB|C) \geq \Pr(AB|C^{\mathsf{c}})$.

ب) اگر A_n دنباله‌ای از پیشامدهای مستقل و $\sum_{n=1}^{\infty} \Pr(A_n) = \infty$ باشد، آن گاه $\Pr(\lim_{n\to\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n) = 1$.

پرسش ۴

آ) فرض کنید $x, L \in \mathbb{N}$ و $0 \leq x \leq L$ باشند. متحرکی از نقطه‌ی x شروع به حرکت می‌کند و در هر گام مستقل از گام‌های قبل به اندازه‌ی یک واحد با احتمال برابر به راست یا چپ حرکت می‌کند. احتمال این که متحرک قبل از این که به نقطه‌ی صفر برسد، به نقطه‌ی L برسد چقدر است؟

ب) احتمال این که متحرک قسمت قبل بالاخره بعد از مدتی دوباره به نقطه‌ی x برسد چقدر است؟

ج) روی یک دایره اعداد $0, 1, 2, ..., n$ به ترتیب ساعت گرد نوشته شده است. متحرکی از نقطه‌ی 0 شروع به حرکت می‌کند و در هر گام مستقل از گام های قبل با احتمال یکسان به عدد بعدی و یا قبلی حرکت می‌کند. متحرک آن قدر حرکت می‌کند تا این که همه‌ی اعداد را ببیند. احتمال این که متحرک در نقطه‌ی x بایستد چقدر است؟

پرسش ۵

آ) دو متحرک روی محور x از نقطه‌ی $x = 0$ شروع به حرکت می‌کنند. دو متحرک باهم گام برمی‌دارند و حرکت آن دو از یکدیگر مستقل است (در هنگام برخورد از یکدیگر رد می‌شوند) و هر یک در هر گام به اندازه‌ی یک واحد با احتمال یکسان به راست یا چپ حرکت می‌کنند. احتمال این که بعد از N قدم این دو متحرک در محل یکسانی باشند چقدر است؟

ب) دو متحرک در صفحه‌ی دو بعدی از مبدا مختصات شروع به حرکت می‌کنند. دو متحرک هم زمان گام برمی‌دارند و در هر گام به اندازه یک واحد با احتمال یکسان در یکی از جهت های راست، چپ، بالا و یا پایین حرکت می‌کنند. احتمال این که پس از N گام دو متحرک در محل یکسانی باشند چقدر است؟

پرسش ۶

آ) در سبدی n توپ آبی و m توپ قرمز داریم ($n \geq m$). در هر مرحله به صورت تصادفی یک توپ از سبد خارج می‌کنیم. احتمال این که لحظه‌ای وجود داشته باشد که تعداد توپ‌های آبی و قرمز درون سبد یکسان باشد (به طوری که این تعداد برابر صفر نباشد) چقدر است؟

ب) دو بازیکن باهم Nبار بازی می‌کنند. در هر بازی احتمال برد و باخت یکسان است. احتمال این که بعد از بازی اول دو بازیکن دیگر هیچ وقت در تعداد برد مساوی نباشند چقدر است؟