آزمون از دو بخش تشکیل شده است. بخش اول شامل ۶ سوال (سواهای ۶ـ۱) با زمان پاسخگویی ۱۸۰ دقیقه است. برای این بخش مجاز به استفاده از هیچ‌گونه منبعی (کتاب، جزوه، اینترنت و ...) و همچنین مشورت با هیچ شخصی نیستید. پاسخهای این بخش را با حداکثر یک ربع تاخیر تا ساعت ۱۸:۴۵ در درس‌افزار بارگذاری کنید. لطفا از پاسخ خود با نرم‌افزار مناسبی مانند camscanner عکس بگیرید و از کیفیت و خوانایی پاسخهای خود اطمینان حاصل کنید. جواب هر سوال را در یک یا چند برگه جداگانه بنویسید و شماره سوال و بخش مربوط را در بالای صفحه ذکر کنید. از انتهای پاسخ یک سوال، پاسخ سوال دیگری را شروع نکنید. نهایتا فقط یک قابل pdf تحویل دهید. آزمون بخش دوم (سوالهای ۹—۷) خانه‌بر (takehome) است و مهلت بارگذاری ساعت ۱۸:۴۵ روز چهارشنبه ۹ تیر ماه است.

پس از آزمون از ساعت ۱۹:۰۰ تا ۲۱:۰۰ از طریق اسکایپ در دسترس باشید. با تعدادی از شما به صورت تصادفی در حد ۱۰ـ۱۵ دقیقه مصاحبه شفاهی به عمل خواهد آمد. چنانچه در این زمینه معذوریتی دارید، قبل از شروع آزمون با ذکر دلیل موجه از طریق ایمیل به استاد درس اطلاع دهید.

۱. **(۱۰ نمره)** فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع نمایی با پارامتر λ باشد. متغیر تصادفی $Y = \lceil X \rceil$ دارای چه توزیعی است؟ مقدار واریانس و متوسط Y را محاسبه کنید. (سقف x کوچکترین عدد صحیح بزرگتر یا مساوی با x می‌باشد).

۲. **(۱۰ نمره)** فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل دارای توزیع نرمال استاندارد باشند. آیا متغیرهای تصادفی $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ و $\Theta = \arctan(\frac{X}{Y})$ از هم مستقل‌ند؟ (توجه کنید که (R, Θ) مختصات (X, Y) در دستگاه مختصات قطبی است.)

۳. **(۱۰ نمره)** فرض کنید که $X_1 \dots X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع یکنواخت روی بازه‌ی $(0, 1)$ باشند. امیدریاضی $\max(X_1, \dots, X_n)$ و $\min(X_1, \dots, X_n)$ را حساب کنید.

۴. **(۱۰ نمره)** تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی دوجمله‌ای منفی با پارامترهای (r, p) را محاسبه کنید. یادآوری: متغیر تصادفی دوجمله‌ای منفی با پارامترهای (r, p)، تعداد آزمایشهای برنولی مستقل لازم با احتمال موفقیت p را برای دستیابی به rامین موفقیت اندازه می گیرد. راهنمایی: از محاسبه مستقیم تابع مولد گشتاور خودداری کنید و از ویژگیهای آن و ارتباط آن با سایر متغیرهای تصادفی بهره ببرید.

توجه: سوالهای زیر محاسباتی محسوب می‌شوند و در صورتیکه اشتباه محاسباتی صورت گیرد، نمره‌ای به راه حل تعلق نمی‌گیرد. در صورت نیاز، از جدول تابع Φ، تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی نرمال استاندارد، که ضمیمه است استفاده کنید.

۵. **(۱۵ نمره)** درس جبرخطی ۱۰ دانش‌جوی سال اول، ۲۵ دانش‌جوی سال دوم و ۱۵ دانش‌جوی سال سوم دارد. فرض کنید نمرات دانش‌جویان سال nـام متغیری نرمال با میانگین μ_n و واریانس σ_n^2 باشد که مقادیر μ_n و σ_n به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 17 \quad \sigma_1 = 0.5 \\ \mu_2 &= 14 \quad \sigma_2 = 1.5 \\ \mu_3 &= 16 \quad \sigma_3 = 1 \end{aligned}$$

دانش‌جویی به تصادف از بین این دانش‌جویان انتخاب می‌کنیم. فرض کنید متغیر تصادفی X نمره این دانشجو و متغیر تصادفی N نشان‌دهنده این که دانش‌جو سال چندم است باشد.

(آ) $\Pr[X \leq 17]$ را تا دو رقم اعشار بیابید.

(ب) تابع احتمال شرطی N را برحسب پیشامد $X \leq 17$ بیابید. یعنی به ازای هر $i \in \{1, 2, 3\}$ مقدار احتمال زیر را محاسبه کنید:

$$\Pr[N = i | X \leq 17]$$

۶. **(۱۰ نمره)** متغیرهای تصادفی X و Y مشترکاً نرمال با متوسط‌های صفر و واریانس‌های $\sigma_X^2 = 1$ و $\sigma_Y^2 = 4$ هستند. اگر ضریب همبستگی X و Y برابر $\rho_{X,Y} = -\frac{1}{2}$ باشد:

(آ) مقدار احتمال $\Pr\{X + Y > 0\}$ را بیابید.

(ب) مقدار احتمال $\Pr\{X + Y > 1\}$ را بیابید.

(ج) مقدار a را طوری تعیین کنید که متغیرهای تصادفی $X + 2Y$ و $aX + Y$ مستقل شوند.

آزمون خانه‌بر: برای حل سوال‌های این بخش می‌توانید با هر شخصی مشورت کنید یا از هر مرجعی مانند کتاب و اینترنت استفاده کنید. ولی حتما پس از فهمیدن راه حل سوال‌ها، جواب‌ها را با ادبیات خودتان بنویسید. منابعی که از آنها استفاده کرده‌اید و نام افرادی که با آنها مشورت کرده‌اید را ذکر کنید. دقت کنید رونویسی جواب از روی برگه‌ی دیگران یا از روی منبعی مثل کتاب یا اینترنت، تخلف محسوب می‌شود.

۷. **(۵ نمره)** صورت قضیه حد مرکزی و اثبات آن را بنویسید.

۸. **(۱۰ نمره)** قورباغه‌ای را در نظر بگیرید که در زمان صفر روی نقطه صفر ایستاده است. این قورباغه در هر مرحله مستقل از حرکات قبلی خود با احتمال $\frac{1}{2}$ به اندازه یک واحد به سمت راست و با احتمال $\frac{1}{2}$ به اندازه یک واحد به سمت چپ می‌رود. فرض کنید X_n محل قورباغه در زمان n باشد. در نتیجه $X_0 = 0$ و X_1 با احتمال $\frac{1}{2}$ برابر ۱ و با احتمال $\frac{1}{2}$ برابر -1 است و

$$X_2 = \begin{cases} -2, & \frac{1}{4} \\ 0, & \frac{1}{2} \\ 2, & \frac{1}{2} \end{cases}.$$

(آ) نشان دهید عدد طبیعی N وجود دارد که به ازای هر $n > N$ داریم

$$\mathbb{P}[X_n > 1390] > 0.49.$$

(ب) نشان دهید احتمال این که قورباغه تا ابد در بازه $[-2021, 1400]$ بماند صفر است.

۹. **(۱۰ نمره)** اگر X یک متغیر تصادفی گاما با پارامترهای $(n, 1)$ باشد، n حدود چقدر بزرگ باشد که

$$\Pr\left[\left|\frac{X}{n} - 1\right| > 0.01\right] < 0.01.$$

(جدول توزیع نرمال) مقدار موجود در سطر a و ستون b بیانگر مقدار تقریبی $\phi(a+b)$ است.

$a \setminus b$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990